Beknopte uitwerking tentamen aansluitcursus

25-10-2004.

1. $\frac{p^2-3p+2}{p^2-5p+6} = \frac{p-1}{p-3}$ voor $p \neq 2$

2. $3x^3+12x^2+9x = 3x(x^2+4x+3) = 3x(x+3)(x+1)$

3. $4x^2+4x-8=0$ is equivalent met $4(x+2)(x-1)=0$. Dus $x=1$ of $x=-$

4. $x \geq 0$ en $x^2+x-2 \leq 0$, dus $0 \leq x \leq 1$.

5. $\ln(x^2+2x+1) \geq 0$ is equivalent met $x^2+2x+1 \geq 1$, dus met $x^2+2x \geq$
Dus: $0 \leq x$ of $x \leq -2$.

6. $(e^{\tan x})' = e^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

7. $(\ln x^3 + \sqrt{x^2-4})' = (3\ln x + \sqrt{x^2-4})' = \frac{3}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{3\sqrt{x^2-4}+x^2}{x\sqrt{x^2-4}}$.

8. $\int 2(2x-1)^4 dx = \frac{1}{5}(2x-1)^5 + c$.

9. $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-1)+2(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{5x-7}{x^2-3x+2}$. Dus
$\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-1} dx = 3\ln|x-2| + 2\ln|x-1| + c$
$= \ln|x-2|^3(x-1)^2 + c$.

10. $\sin 35^\circ = \sqrt{1-p^2}$ (want $\sin 35^\circ > 0$)
$\cos 70^\circ = 2p^2-1$, $\sin 70^\circ = 2p\sqrt{1-p^2}$, $\sin 55^\circ = \cos 35^\circ = p$
$\sin -55^\circ = -\sin 55^\circ = -p$.

11. $t_k = \frac{7}{8^k} \cdot \frac{8^{k+1}}{5^{k+1}} = 56 \cdot \frac{1}{5^{k+1}}$. De reden is $\frac{1}{5}$, eerste term is $\frac{56}{25}$.
Som van de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \frac{56}{25} \cdot \frac{1}{1-1/5} = \frac{56}{25} \cdot \frac{5}{4} = \frac{14}{5}$.

12. $\sum_{n=0}^{\infty} (x^2-2)^n$ convergeert als en alleen als $-1 < x^2-2 < 1$, d.w.z. als en alleen als $1 < x^2 < 3$. Dus de reeks convergeert als $-\sqrt{3} < x < -1$ of $1 < x < \sqrt{3}$.

13. Stel $z = x+iy$. Dan $|(x-1)+i(y-2)|^2 = |(x+2)+i(y+1)|^2$ is equivalent met $(x-1)^2+(y-2)^2 = (x+2)^2+(y+1)^2$. Uitwerken geeft $y=-x$.

14. $z^2-4z+4-2i=0$. Kwadraatafsplitsen: $(z-2)^2 = 2i = 2 \cdot e^{i\pi/2}$
Dus $z-2 = \pm\sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = \pm(1+i)$. Dus $z=3+i$ of $z=1-i$.

15. Basisstap: $n=1$. $6 \cdot 9 - 4 = 54-4 = 50 = 10 \cdot 5$
Inductiestap: Stel het is waar voor $n=m$, dus $6 \cdot 9^m - 4^m$ deelbaar door 5. Voor $n=m+1$ geldt dan
$$6 \cdot 9^{m+1} - 4^{m+1} = 9 \cdot (6 \cdot 9^m - 4^m) + 9 \cdot 4^m - 4^{m+1} = 9 \cdot (6 \cdot 9^m - 4^m) + 5 \cdot 4^m$$
Volgens de inductieaanname is de eerste term deelbaar door 5. De tweede term is dat ook, dus $6 \cdot 9^{m+1} - 4^{m+1}$ is deelbaar door 5.