Uitwerking tentamen Basiswiskunde 22-10-2007

1	27=3.3.3 36=2.2.3.3 45=3.3.5	ggd = 3.3 = 9 kgv = 2.2.3.3.3.5 = 540	1p 1p

2 $\frac{5}{(x-4)(x+4)} - \frac{x-1}{2(x-4)} = \frac{10}{2(x-4)(x+4)} - \frac{(x-1)(x+4)}{2(x-4)(x+4)} =$ 1p

$\frac{-x^2-3x+14}{2(x-4)(x+4)}$ 1p

3 $(2x)^5 + 5(2x)^4 \cdot (-1) + 10(2x)^3 \cdot (-1)^2 + 10(2x)^2 \cdot (-1)^3 + 5(2x) \cdot (-1)^4 + (-1)^5 =$ 1p

$32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$ 1p

4 $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (-4 + -25) = -116$ 2p

5 $\cos(\frac{3}{4}\pi) = 1 - 2\sin^2(\frac{3}{8}\pi) \Rightarrow$ 1p

$-\frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 - 2\sin^2(\frac{3}{8}\pi) \Rightarrow \sin(\frac{3}{8}\pi) = +\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}$ 1p

6 $f'(x) = -e^{-x} + 2\sin(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 = -\frac{1}{e^x} + 6\sin(3x) \cdot \cos(3x)$ elk deel 1p

7 $\arcsin x(\arcsin x + \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \arcsin x = 0 \vee \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$ 1p

Dus $x = 0 \vee x = -1$ 1p

8 $x(x+3)(x^2 - 5x + 6) =$ 1p

$x(x+3)(x-2)(x-3)$ 1p

9 $x - 6\sqrt{x} - 27 = p^2 - 6p - 27 = 0$ 1p

$(p-9)(p+3) = 0 \Rightarrow p = 9 \vee p = -3 \Rightarrow x = 81$ 1p

10 $\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\varphi = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1p

Dus $z = 4(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}) = 2 \pm 2i\sqrt{3}$ 1p

11 $z = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}) = 2e^{-\frac{1}{3}\pi i}$ 1p

$z^5 = 2^5 e^{-\frac{5}{3}\pi i} = 32e^{\frac{1}{3}\pi i} = 32(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}) = 16 + 16i\sqrt{3}$ 1p

12 $(z+2\tfrac{1}{2})^2 = -\tfrac{3}{4}$ 1p

$z+2\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{1}{2}i\sqrt{3} \Rightarrow z = -2\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$ 1p

13 $z^3 = -8i = 8e^{-\frac{1}{2}\pi i}$ 1p

$z = 2e^{-\frac{1}{6}\pi i + \frac{2}{3}k\pi i} \Rightarrow z = 2e^{\frac{1}{2}\pi i} \vee z = 2e^{-\frac{1}{6}\pi i} \vee z = 2e^{-\frac{5}{6}\pi i}$ 1p

$z = 2\cdot i = 2i \quad \vee \quad z = 2(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i) = \sqrt{3} - i \quad \vee \quad z = 2(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}) = -\sqrt{3} - i$ 1p

14 $z^2 = 5(\tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}i) = r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))$ dus $r = \sqrt{5}$ 1p

$\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1 \Rightarrow \tfrac{3}{5} = 2\cos^2\varphi - 1 \Rightarrow \cos\varphi = \pm\tfrac{2}{5}\sqrt{5}$

Als $\cos\varphi = +\tfrac{2}{5}\sqrt{5}$ dan geldt in $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$:

$\tfrac{4}{5} = 2\cdot\sin\varphi\cdot\tfrac{2}{5}\sqrt{5} \Rightarrow \sin\varphi = \tfrac{1}{5}\sqrt{5}$ 1p

Evenzo volgt uit $\cos\varphi = -\tfrac{2}{5}\sqrt{5}$ dat $\sin\varphi = -\tfrac{1}{5}\sqrt{5}$

$z = \sqrt{5}(\tfrac{2}{5}\sqrt{5} + \tfrac{1}{5}i\sqrt{5}) = 2 + i \quad \vee \quad z = \sqrt{5}(-\tfrac{2}{5}\sqrt{5} - \tfrac{1}{5}\sqrt{5}) = -2 - i$ 1p

15 $n = 1$ dan $-1\cdot -3 + 1\cdot -1 = 2$ Klopt! 1p

Stel formule klopt voor n=m. Dan geldt:

$$\sum_{k=1}^{2(m+1)} (-1)^k(2k-5) = \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k(2k-5) + (-1)^{2m+1}(4m+2-5) + (-1)^{2m+2}(4m+4-5)$$

$= 2m - (4m-3) + (4m-1) = 2m + 2 = 2(m+1)$.

Dus klopt de formule ook voor n=m+1 2p

16 $n = 1$ dan $3\cdot 7 - 3^2 = 12$ is deelbaar door 4. Klopt! 1p

Stel formule klopt voor n=m. Dan geldt:

$3\cdot 7^{m+1} - 3^{m+2} = 7\cdot 3\cdot 7^m - 3\cdot 3^{m+1} = 7\cdot 3\cdot 7^m - 7\cdot 3^{m+1} + 4\cdot 3^{m+1} =$

$7(3\cdot 7^m - 3^{m+1}) + 4\cdot 3^{m+1}$. Deze twee delen zijn beide deelbaar door 4.

De eerste door de inductie aanname en de tweede door de factor 4.

Dus de formule geldt ook voor n=m+1 2p