

- (a) $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$. Dus $f'(x) = 0$ als en alleen als $1 - x^2 = 0$. De kritieke punten zijn dus $x = 1$ en $x = -1$.

(b) $f''(x) = (x^3 - 3x)e^{-x^2/2}$. Dus $f''(1) < 0$ en $f''(-1) > 0$. Bij het punt $x = 1$ bevindt zich dus een lokaal maximum en bij het punt $x = -1$ een lokaal minimum.
- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - x})(x + \sqrt{x^2 - x})}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x)}{x + \sqrt{x^2 - x}} =$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1 - 1/x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 1/x}} = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + \sin 4x}}{x \cos x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 4x (1 + \sin 4x)^{-1/2}}{\cos x - x \sin x} = -2$
- (a) $f(0) = 2$ en $f'(x) = \pi \cos \pi x + \frac{-4}{(1+2x)^2}$, dus $f'(0) = \pi - 4$. Verder is $f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x + \frac{16}{(1+2x)^3}$, dus $f''(0) = 16$. Het tweede orde Taylor polynoom wordt nu gegeven door:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 = 2 + (\pi - 4) \cdot x + 8x^2.$$

- (b) $g(x) = e^{\sin x \ln(x+1)}$, dus

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\cos x \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) e^{\sin x \ln(x+1)} \\ &= \left(\cos x \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) (x+1)^{\sin x}. \end{aligned}$$

- (a) Impliciet differentiëren naar x geeft: $-\sin x + y + x \frac{dy}{dx} + \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$. Oplossen naar $\frac{dy}{dx}$ geeft:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - y}{x + \cos y}.$$

- (b) Invullen van $x = 0$ en $y = \pi$ geeft: $\frac{dy}{dx} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$. De vergelijking van de raaklijn wordt gegeven door $y = \pi x + \pi$.

- (a) $\int \frac{3x^2 + 2x + 6}{x^2 + 1} dx = \int 3 + \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{3}{x^2 + 1} dx =$
 $= 3x + \ln(x^2 + 1) + 3 \arctan x + C.$

(b) $\int x^2 e^{-2x} dx \stackrel{P.I.}{=} -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx \stackrel{P.I.}{=} -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx =$
 $= -\frac{1}{2} (x^2 + x + \frac{1}{2}) e^{-2x} + C.$

(c) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \stackrel{u=\ln x}{=} \int \cos u du = \sin u + C = \sin(\ln x) + C.$

6. De karakteristieke vergelijking van deze D.V. is $r^2 + 5r + 6 = 0$. De vergelijking heeft 2 oplossingen, namelijk $r = -2$ en $r = -3$. De algemene oplossing wordt dus gegeven door $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$. Dit geeft $y'(x) = -2Ae^{-2x} - 3Be^{-3x}$. Invullen van de beginvoorwaarden geeft $5 = y(0) = A + B$ en $-11 = y'(0) = -(2A + 3B)$. Dit geeft $A = 4$ en $B = 1$. De oplossing van het beginwaarde probleem wordt dus gegeven door:

$$y(x) = 4e^{-2x} + e^{-3x}.$$

7. Dit is een eerste orde differentiaal vergelijking van de vorm $y' + p(x)y = q(x)$. We berekenen eerst

$$\mu(x) = \int p(x) dx = \int 2 dx = 2x (+C)$$

De algemene oplossing wordt nu gegeven door

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x) dx = e^{-2x} \int e^{2x} \cdot e^x dx = \\ &= e^{-2x} \int e^{3x} dx = e^{-2x} \left(\frac{1}{3} e^{3x} + C \right) = \frac{1}{3} e^x + C e^{-2x}. \end{aligned}$$

De algemene oplossing is: $y(x) = \frac{1}{3} e^x + C e^{-2x}$.