Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Calculus I (SFM)
Afdeling Wiskunde	Duur: 2 uur
Vrije Universiteit	16-12-2008

Dit zijn de uitwerkingen van het Calculus 1 tentamen voor studenten Scheikunde, Farmacochemie, Medische Natuurwetenschappen en SBI.

Dit zijn voorbeeld uitwerkingen. Er zijn ook andere oplossingen mogelijk, deze worden uiteraard (mits correct) ook goed gerekend.

1. (a) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

   (b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$, dus de punten waar de afgeleide gelijk is aan 0, zijn alle punten x die voldoen aan $(x-1)^2 = 1$. Dit zijn de punten $x = 0$ en $x = 2$. Dit zijn dus de kritieke punten.

   (c) Hiervoor kijken we naar de tweede afgeleide van f die wordt gegeven door: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$. Oftewel $f(0) < 0$ en $f(2) > 0$. Hieruit volgt dat er zich in $x = 0$ een lokaal maximum bevind en in het punt $x = 2$ een lokaal minimum.

2. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{\cos x - 1} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x}{-\sin x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8}{-\cos x} = -8.$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{1/\ln x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{-1/(\ln x)^2 \cdot x}$

   $= \lim\limits_{x\to 0^+} -\cos x \cdot (\ln x)^2 x = \lim\limits_{x\to 0^+} -\cos x \cdot (\ln x \cdot \sqrt{x})^2 = 0$ (standaardlimiet).

   Dus: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sin x \cdot \ln x} = e^0 = 1.$

   Alternatieve oplossing: $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} \cdot x \ln x = 1 \cdot 0 = 0.$

3. Impliciet differentiëren geeft:

$$4x^3 + 4y^3 \frac{dy}{dx} = 0.$$

   Invullen van $x = 2$ en $y = -2$ geeft vervolgens $32 - 32\frac{dy}{dx} = 0$, en hieruit volgt dat $\frac{dy}{dx} = 1$. De formule van de raaklijn wordt nu gegeven door

$$y = m(x - x_0) + y_0 = 1 \cdot (x-2) - 2 = x - 4.$$

4. (a) We berekenen achtereenvolgens $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ en $f''(x) = \frac{2\tan x}{\cos^2 x}$. Invullen voor $x_0 = \frac{\pi}{4}$ geeft $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, $f'(\frac{\pi}{4}) = 2$ en $f''(\frac{\pi}{4}) = 4$. Dit geeft het volgende Taylor polynoom van orde 2:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \\ &= 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

   (b) Invullen van $\frac{\pi}{3}$ in $P_2(x)$ geeft:

$$P_2(\frac{\pi}{3}) = 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{12} + 2 \cdot \frac{\pi^2}{144} = 1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2}{72}.$$

5. (a) $\int x^2 e^{4x}\,dx \overset{P.I.}{=} x^2 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot e^{4x} - \dfrac{1}{2}\int x e^{4x}\,dx$

$$\overset{P.I.}{=} x^2 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot e^{4x} - \tfrac{1}{8}x \cdot e^{4x} + \tfrac{1}{8}\int e^{4x}\,dx$$
$$= x^2 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot e^{4x} - \tfrac{1}{8}x \cdot e^{4x} + \tfrac{1}{32}e^{4x} + C$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8}\right)e^{4x} + C.$$

(b) $\int \dfrac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx \overset{u=1+x^2}{=} \dfrac{1}{2}\int \dfrac{\ln u}{u}\,du$

$$= \tfrac{1}{4}(\ln u)^2 + C = \tfrac{1}{4}\big(\ln(1+x^2)\big)^2 + C.$$

6. $\frac{dy}{dx} = x(1+y^2)$ geeft:

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int x\,dx.$$

Dit geeft $\arctan y = \frac{1}{2}x^2 + C$, oftewel $y = \tan(\frac{1}{2}x^2 + C)$. Invullen van de begin-conditie geeft $C = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, dus de oplossing is:

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$