Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Calculus I (SFM)
Afdeling Wiskunde	Uitwerkingen
Vrije Universiteit	18-12-2007

1. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

   (b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Dus $f'(x) = 0$ als en alleen als $x^2 = 1$. De kritieke punten zijn dus: $x = 1$ en $x = -1$.

   (c) $f''(x) = 2/x^3$. Dus $f(1) = 2 > 0$ en $f(-1) = -2 < 0$. Conclusie: in $x = 1$ heeft de functie f een lokaal minimum en in $x = -1$ heeft f een lokaal maximum.

2. (a) $$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{\sqrt{5+t^2} - \sqrt{5-t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{\sqrt{5+t^2} - \sqrt{5-t^2}} \times \frac{\sqrt{5+t^2} + \sqrt{5-t^2}}{\sqrt{5+t^2} + \sqrt{5-t^2}} =$$

   $$\lim_{t\to 0} \frac{t^2\left(\sqrt{5+t^2} + \sqrt{5-t^2}\right)}{(5+t^2) - (5-t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\left(\sqrt{5+t^2} + \sqrt{5-t^2}\right)}{2t^2} =$$

   $$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{5+t^2} + \sqrt{5-t^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

   (b) $$\lim_{x\to\infty} 4x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{4x}}$$

   $$\stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1-3/x} \cdot 3/x^2}{-1/4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1-3/x} \cdot 3}{-1/4} = \frac{3}{-1/4} = -12$$

   Dus: $$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty} e^{4x \ln\left(1-\frac{3}{x}\right)} = e^{-12}.$$

   (c) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{x^2}}{3x} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} - 2xe^{x^2}}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. We berekenen achtereenvolgens:

   $f(0) = 0 + 1 = 1$, $f'(x) = (\cos x)^{-2} + 2e^{2x}$, dus $f'(0) = 1 + 2 = 3$,

   $f''(x) = 2\sin x \cdot (\cos x)^{-3} + 4e^{2x}$, dus $f''(0) = 0 + 4 = 4$.

   Dan volgt $P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \dfrac{1}{2} f''(0)(x-0)^2 = 1 + 3x + \dfrac{4x^2}{2} = 1 + 3x + 2x^2$.

4. Impliciet differentiëren naar x geeft: $3x^2 - y - x \cdot \dfrac{dy}{dx} + 2 \cdot \dfrac{dy}{dx} \cdot e^{2y} = 0$.

   Invullen van $x = 0$ en $y = 1/2$ geeft vervolgens: $3 \cdot 0 - 1/2 - 0 \cdot \dfrac{dy}{dx} + 2 \cdot \dfrac{dy}{dx} \cdot e = 0$.

   Oftewel: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4e}$. De vergelijking van de raaklijn aan K in het punt $(0, 1/2)$ wordt nu gegeven door $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4e} \cdot x$.

5. (a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x-4}{x^2-2x-3}\,dx = \int 1 + \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}\,dx =$

$$= \int 1 + \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1}\,dx = x + 2\ln|x-3| + \ln|x+1| + C.$$

(b) $\displaystyle\int \sin 2t \cdot e^{\cos 2t}\,dt \overset{u=\cos 2t}{=} -\frac{1}{2} \cdot \int e^u\,du = -\frac{1}{2} \cdot e^u + C = -\frac{1}{2} \cdot e^{\cos 2t} + C.$

(c) $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx \overset{\text{P.I.}}{=} x^2 \sin x - \int 2x \sin x\,dx \overset{\text{P.I.}}{=} x^2 \sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x\,dx =$

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C.$

6. De karakteristieke vergelijking van deze D.V. is $r^2 - 4r + 4 = 0$. Deze vergelijking heeft precies één oplossing, namelijk $r = 2$. De algemene oplossing wordt dus gegeven door: $y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$. Dit geeft $y'(x) = (2A + B)e^{2x} + 2Bxe^{2x}$. Invullen van de beginvoorwaarden geeft $3 = y(0) = A$ en $7 = y'(0) = 2A + B$. Hieruit volgt dat $A = 3$ en $B = 1$. De oplossing van het beginwaarde probleem is dus $y(x) = 3e^{2x} + xe^{2x} = (3 + x)e^{2x}$.

7. (a) Als we $y = 110$ invullen in de differentiaalvergelijking, dan krijgen we: $\displaystyle\frac{dy}{dt} = 20 \cdot 110 \left(1 - \frac{110}{100}\right) = 20 \cdot 110 \cdot \frac{-1}{10} = -20 \cdot 11 < 0$. Er is dus sprake van een negatieve groei, oftewel een **afname** in de populatiegrootte.

(b) By $y = 65$ is er sprake van een toename in het aantal schapen. Het aantal schapen zal blijven groeien naar een maximum van 100 schapen, dit is de stabiele toestand.