UITWERKINGEN TENTAMEN CALCULUS 1

20 OKTOBER 2008

1. a) $|f(x)| < 1$ is equivalent aan $-1 < f(x) < 1$, dus $-1 < x - \frac{2}{x} < 1$. Aangezien het domein van f alleen $x > 0$ betreft kunnen we direct met x vermenigvuldigen, zonder dat de tekens omslaan. Dus $-x < x^2 - 2 < x$. Lossen we eerst $-x < x^2 - 2$ op: $x^2 + x - 2 > 0$, ofwel $(x+2)(x-1) > 0$. Dit geeft $x < -2$ of $x > 1$, dus op $(0, \infty)$, het domein van f, alleen $x > 1$.

De andere ongelijkheid, $x^2 - 2 < x$ geeft $(x-2)(x+1) < 0$, en dus $x \in (-1, 2)$. Wederom, binnen het domein van f wordt dit $x \in (0, 2)$. De complete oplossing van $|f(x)| < 1$ is dus $(1, \infty) \cap (0, 2) = (1, 2)$.

b) Op $(0, \infty)$ geldt $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2} > 0$. Dus f is strict stijgend op zijn domein en dus inverteerbaar. (Alleen maar kijken naar $f'(x)$ zonder het domein in ogenschouw te nemen is niet voldoende, aangezien f niet continu is op heel $\mathbb{R}$. Je kunt dus niet meteen concluderen als $f'(x) > 0$ voor alle $x \neq 0$ dat dan f inverteerbaar is. Het zou voor deze f ook niet waar zijn!) Voor het functievoorschrift:

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y) = y - \frac{2}{y},$$

dus

$$y^2 - xy - 2 = 0.$$

Dit geeft

$$y = \frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 8}.$$

Aangezien $D(f) = B(f^{-1}) = (0, \infty)$, moet $y > 0$ zijn. Bovendien geldt dat $\sqrt{x^2 + 8} > x$, dus

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 8},$$

2 a) Gegeven $v = -2 + 2\sqrt{3}\, i$ en $w = 2 + 2i$.

(i) $|v| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$; $|w| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Verder geldt $\cos\theta = -2/|v| = -\frac{1}{2}$, dus $\theta = 2\pi/3$ of $\theta = -2\pi/3$. Aangezien $\sin\theta = 2\sqrt{3}/|v| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, moet $\theta = \pi/3$ of $2\pi/3$ zijn. Dus $\theta = 2\pi/3$ is de enige mogelijkheid. Voor $Arg(w)$ net zo: $\cos\phi = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin\phi$. De enige hoek ϕ die aan beide voorwaarden voldoet is $\phi = \pi/4$. Een redenering waarbij het kwadrant waar de hoek in ligt wordt aangegeven is ook voldoende om tot een unieke hoek te komen.

(ii) Gebruik de stelling van De Moivre. Die geeft direct dat

$$|v^5| = |v|^5 = 4^5, \quad |w^4| = |w|^4 = (2\sqrt{2})^4 = 8^2 = 4^3,$$

en

$$\arg(v^5) = 5\arg(v) = \frac{10\pi}{3}, \quad \arg(w^4) = 4\arg(w) = \pi.$$

Dus
$$\frac{v^5}{w^4} = \frac{4^5}{4^3}e^{i(10\pi/3-\pi)} = 4^2e^{i(7\pi/3)} = 16e^{i\pi/3} = 16(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)) = 16\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\Big)$$
Dus het antwoord is $8+8\sqrt{3}\,i$.

(b) Laat $w = z-2$. Dan $w^4 = -16$. Schrijf $w = re^{i\phi}$. We weten $-16 = 16e^{i\pi+2k\pi}$, met $k \in \mathbb{Z}$. Dus
$$w = 16^{1/4}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi)}, \text{ voor } k \in \mathbb{Z}.$$
Dit geeft vier verschillende oplossingen, voor $k = 0,1,2,3$:
$$w_1 = 2e^{i\pi/4},\ w_2 = 2e^{3i\pi/4},\ w_1 = 2e^{5i\pi/4},\ w_2 = 2e^{7i\pi/4}.$$
Ten slotte $z_i = w_i+2$, voor $i = 0,1,2,3$. Deze zijn ook weer terug te schrijven naar $a+bi$:
$$\begin{aligned} z_1 &= 2+(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i), \\ z_2 &= 2+(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i), \\ z_3 &= 2+(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i), \\ z_4 &= 2+(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i). \end{aligned}$$

3 a) Gebruik de worteltruc:
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+7}-x} &= \frac{\sqrt{x^2+4x+7}+x}{(x^2+4x+7)-x^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+4x+7}+x}{4x+7} \\ &= \frac{\sqrt{1+4/x+7/x^2}+1}{4+7/x}, \end{aligned}$$
waarbij we bij de laatste stap hebben gebruikt dat $\sqrt{x^2} = |x| = x$ voor $x > 0$. Dus
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+7}-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+4/x+7/x^2}+1}{4+7/x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

b) Gebruik óf Taylor-polynomen, óf l'Hôpital. Eerst met Taylor:
$$\frac{x\sin x}{1-\cos x} = \frac{x^2+\mathcal{O}(x^4)}{\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)} = \frac{1+\mathcal{O}(x^2)}{\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x^2)}.$$
Dus
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\mathcal{O}(x^2)}{\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x^2)} = 2.$$
Nu met l'Hôpital: invullen van $x = 0$ geeft $0/0$, dus mogen we l'Hôpital toepassen.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x}.$$
Invullen van $x = 0$ geeft weer $0/0$, dus nogmaals l'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x - x\sin x}{\cos x} = \frac{2\cos 0 - 0}{\cos 0} = 2.$$

c) Schrijf $x^{1/x} = e^{\ln(x^{1/x})} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$. We weten dat
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0,$$

(standaardlimiet), dus

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = e^0 = 1.$$

4 a) $f(x)$ is continu in $x = 0$ dan en slechts dan als geldt dat

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = b.$$

Bereken we deze twee limieten, dan zien we

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [ax + b] = b,$$

en

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [x + x^2 \ln(x)] = 0$$

($x^2 \ln(x) \to 0$ voor $x \to 0^+$ is een standaardlimiet). Dus $f(x)$ is continu in $x = 0$ dan en slechts dan als $b = 0$.

b) Volgens de definitie van de afgeleide is $f(x)$ differentieerbaar in $x = 0$ dan en slechts dan als er een $L \in \mathbb{R}$ bestaat zodat

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = L.$$

Rekenen we dit uit (met de inmiddels gevonden $b = 0$), dan vinden we

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{ah - 0}{h} = a,$$

en

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h + h^2 \ln(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} [1 + h\ln(h)] = 1,$$

wederom gebruik maken van een standaardlimiet. Hieruit volgt dus $a = 1$.

We zouden ook gebruik kunnen maken van de continuïteit van de afgeleiden en kunnen bekijken voor welke a geldt

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

Dan vinden we

$$a = \lim_{x\to 0^+} 1 + 2x\ln(x) + \frac{x^2}{x} = 1.$$

Beide methoden volstaan voor deze opgave.

5 Laat $f(x) = \arctan x$. Deze functie is continu en differentieerbaar op heel $\mathbb{R}$. De MWS mag dus toegepast worden op bijvoorbeeld $[0, x]$, en stelt dat er een $c \in (0, x)$ bestaat zodat

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c).$$

Vullen we dit in, dan vinden we dat er een $c \in (0, x)$ bestaat zodat

$$\frac{\arctan x - 0}{x} = \frac{1}{1 + c^2}.$$

Nu geldt dat $1/(1 + c)^2 < 1$ voor alle $c > 0$, en dus dat

$$\frac{\arctan x}{x} < 1.$$

Aangezien $x > 0$ volgt hieruit dat

$$\arctan x < x$$

voor alle $x > 0$.

6 Gebruik makend van de standaard Taylor-polynomen van e^x en $\sin x$ rond $x = 0$, vinden we

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\Big) - \Big((x^2) + \mathcal{O}(x^6)\Big) \\ &= x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^5). \end{aligned}$$

Het gevraagde Taylor-polynoom, $P_4(x)$, is dus $x^3 + \frac{1}{2}x^4$.

7 a) Gebruik substitutie, met $u = e^x$, zodat $du/dx = e^x$. Na subtitutie nog kwadraatafsplitsen:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4e^x + 5} &= \int \frac{du}{u^2 + 4u + 5} \\ &= \int \frac{du}{(u+2)^2 + 1} \\ &= \arctan(u + 2) + C \\ &= \arctan(e^x + 2) + C. \end{aligned}$$

b) Gebruik breuksplitsen:

$$\frac{x-4}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

voor juiste constanten $A, B, C \in \mathbb{R}$. Gelijknamig maken van de breuk rechts geeft

$$A(x^2 + 1) + (Bx + C)x = x - 4 \quad \text{voor alle } x.$$

Oplossen naar machten van x geeft

$$A + B = 0,\ C = 1,\ A = -4.$$

Dus $B = 4$. We krijgen dus de integraal

$$-4\int \frac{dx}{x} + 4\int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -4\ln|x| + 2\ln|x^2+1| + \arctan x + C_1.$$

met $C_1 \in \mathbb{R}$.

8 a) Gebruik partiële integratie en houd rekening met het oneigenlijk zijn van de integraal:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty xe^{-2x}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R xe^{-2x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^R\right] + \int_0^R \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx = \\ & \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^R\right] = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2}R - \frac{1}{4}\right]e^{-2R} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

omdat $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ (standaardlimiet).

b) Deze integraal is oneigenlijk in $x = 0$, dus:

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^c \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^-} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1}^c\right] = \lim_{c\to 0^-} \frac{3}{2}\sqrt[3]{c^2} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}.$$