Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Calculus 1
Afdeling Wiskunde	Uitwerkingen BWI/ECT
Vrije Universiteit	24-10-2007

1. a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x \times \frac{\sqrt{x^2+2x+3}+x}{\sqrt{x^2+2x+3}+x} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = 1.$

b) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$

$\overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}} = -\frac{1}{2}.$

c) $\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+\tan x)}{x}} = e$, want

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x)}{x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\tan x} \times \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$

2. a) Voor continuïteit in $x=0$ moet er gelden $\lim_{x\to 0} f_c(x) = f_c(0) = c$. Er geldt

$$-|x| \le x\sin\left(\frac{3}{x}\right) \le |x|,$$

dus volgt met de insluitstelling dat $\lim_{x\to 0} f_c(x) = 0 = c$.

b) We nemen dus $f_c(0)=0$. Voor differentieerbaarheid in $x=0$ moet de limiet

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_c(x)-f_c(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{3}{x}\right)$$

bestaan. Het is duidelijk dat dit niet het geval is (binnen iedere omgeving van 0 neem $\sin\left(\frac{3}{x}\right)$ zowel de waarde 1 als de waarde -1 aan), dus $f_c(x)$ is niet differentieerbaar in $x=0$.

3. Stel $y=y(x)$. Impliciet differentiëren van de vergelijking naar x levert

$$2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} - 3x^2y^2 - 2x^3y\frac{dy}{dx} = 0.$$

$x=-1$ en $y=2$ invullen levert $-16+12\frac{dy}{dx} - 12 + 4\frac{dy}{dx} = 0$, dus $\frac{dy}{dx} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}$. De vergelijking van de gevraagde raaklijn is dus

$$y = 2 + \frac{7}{4}(x+1) = \frac{7}{4}x + \frac{15}{4}.$$

Z.O.Z.

4. Voor $x = 0$ is de stelling duidelijk. Voer in de functie $f(x) = \sqrt{1+x}$. Deze is continu op $[0, \infty)$ en differentieerbaar op $(0, \infty)$. Kies nu $x > 0$ willekeurig. Volgens de Middelwaardestelling is er een $c \in (0, x)$, waarvoor geldt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}.$$

Omdat $c > 0$ geldt $\frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2}$, zodat volgt

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2} \quad \text{en dus} \quad \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x.$$

5. We berekenen achtereenvolgens:
$f(0) = 0, f'(x) = 1 + \dfrac{2}{1+2x}$, dus $f'(0) = 3$ en $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+2x)^2}$, dus $f''(0) = -4$.
Dan volgt: $P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 = 3x - 2x^2$.

6. De hoofdstelling van de Calculus en de kettingregel geven:

$$f'(x) = \ln\left(1 + \left(e^{2x}\right)^2\right) \times 2e^{2x} = 2e^{2x}\ln\left(1 + e^{4x}\right), \qquad \text{dus} \qquad f'(0) = 2\ln 2.$$

7. a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x}\,dx \overset{t=\ln x}{=} \int_0^{1/2} \sin(\pi t)\,dt = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{\pi},$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - x - 2}\,dx = \int 1 + \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}\,dx =$
$\displaystyle x + \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}\,dx = x + \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C,$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R xe^{-x}\,dx \overset{p.i.}{=} \lim_{R\to\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_1^R + \int_1^R e^{-x}\,dx\right) =$
$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left(-xe^{-x} - e^{-x}\Big|_1^R\right) = \lim_{R\to\infty} -Re^{-R} - e^{-R} + e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1}.$
(Dit is een standaardlimiet.)