UITWERKING TENTAMEN CALCULUS I 27-10-2004

① a) Er moet gelden $4x - x^2 = x(4-x) \geq 0$. Dus $D_f = [0,4]$

b) ① Randpunten: $f(0) = 0 = f(4)$. ② Punten waar $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \sqrt{4x-x^2} + \frac{x(4-2x)}{2\sqrt{4x-x^2}} = \frac{6x-2x^2}{\sqrt{4x-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$$

$f(3) = 3\sqrt{3}$.

De functie stijgt op $[0,3]$ en daalt op $[3,4]$.

Dus: Globaal minimum ter grootte 0 (in $x=0$ en $x=4$) en een globaal maximum ter grootte $3\sqrt{3}$ (in $x=3$).

② Als $f_c(x)$ continu is in $x=0$, dan moet gelden: $\lim_{x\to 0} f_c(x) = f_c(0) = |c|$

$\lim_{x\to 0^+} f_c(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} \sin\frac{1}{x} = 0$, want via de insluitstelling:

voor $x>0$: $0 < \sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x} \leq \sqrt[3]{x} \longrightarrow 0$ $(x \to 0)$

Dus: $|c| = 0$, dus $c = 0$.

③ Voer in de functie $f(x) = \cos x - 5x + 2$ en constateer dan f differentieerbaar is, dus ook continu.

(i) $f(0) = 3$ en $f(\pi) = 1 - 5\pi < 0$. Dus geldt volgens de Tussenwaardestelling dat er een $c \in (0,\pi)$ bestaat zo dat $f(c) = 0$.

(ii) $f'(x) = -\sin x - 5 < 0 \ \forall x$. Dus geldt volgens een gevolg van de Middelwaardestelling dat f dalend is op $\mathbb{R}$. Er is dus maximaal één $c \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt $f(c) = 0$.

(i)+(ii) gecombineerd geeft dat er precies één $c \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $f(c) = 0$. Dus de vgl $\cos x = 5x - 2$ heeft precies 1 oplossing.

④ a) Worteltruc: $\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{x^2\cos x} \cdot \frac{2+\sqrt{x^2+4}}{2+\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to 0} \frac{4-(x^2+4)}{x^2\cos x} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{x^2+4}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\cos x} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{x^2+4}} = \frac{-1}{1} \cdot \frac{1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \sin 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

c) $\lim_{x\to\infty} (e^{2x}-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{x}} = e^2$, want:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{2x}-2x)}{x} \overset{\text{(L'Hospital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}-2}{e^{2x}-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-2e^{-2x}}{1-2xe^{-2x}} = 2.$$

5 Stel $y=y(x)$ en differentieer impliciet naar x:

$$4x + 4y\cdot\frac{dy}{dx} = 5y + 5x\frac{dy}{dx}.$$

Dus in $(x,y)=(1,2)$ geldt $\frac{dy}{dx} = \left.\frac{5y-4x}{4y-5x}\right|_{(1,2)} = \frac{6}{3} = 2$.

Dus vgl. van de raaklijn: $y-2 = 2\cdot(x-1)$, dus $y=2x$.

6 a) Partieel integreren: $\int \frac{\ln x}{x^{3/2}}\,dx = -\frac{2\ln x}{x^{1/2}} + \int \frac{2}{x^{3/2}}\,dx =$

$$= -\frac{2\ln x}{x^{1/2}} - \frac{4}{x^{1/2}} + C = -\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C.$$

b) Substitutieregel ($u=\cos x$): $\int \sin x\cdot\sqrt{1+\cos x}\,dx = \begin{cases} u=\cos x \\ du=-\sin x\,dx \end{cases}$

$$= \int -\sqrt{1+u}\,du = -\frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}(1+\cos x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

7 a) Invullen van $y(x)=e^{Rx}$ geeft de karakteristieke vgl:

$R^2+2R-15 = (R+5)(R-3) = 0$. Dus $R=3$ of $R=-5$.

Algemene oplossing: $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x}$.

b) Scheiden van variabelen: $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \cos x$.

Dus: $\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \cos x\,dx$, oftewel $-\frac{1}{y} = \sin x + C$.

Kortom: $y(x) = \frac{-1}{C+\sin x}$. Beginwaarde $y(0)=1$ invullen.
levert $1 = -1/C$, dus $C=-1$

Oplossing: $y(x) = \frac{1}{1-\sin x}$.