Antwoorden proeftentamen: Fysica en Medische Fysica 2,
13.30 – 15.45 uur, maandag 21 mei 2007.

1) Een bolvormige ballon van rubber heeft een lading Q, die homogeen over het oppervlak van de ballon is verdeeld. Op tijdstip t=0 heeft de ballon een straal r_0 en vanaf dat moment wordt de ballon in zo'n tempo opgeblazen, dat de straal $r(t)$ lineair tot $2r_0$ toeneemt in T=30 s.

a. Bereken de elektrische veldsterkte $E(t)$ net buiten het oppervlak van de ballon als functie van de tijd tussen t=0 en t=T.
b. Bereken de elektrische veldsterkte $E(t)$ op afstand $r = 4r_0$ van het centrum van de bol als functie van de tijd tussen t=0 en t=T.

De straal als functie van de tijd tussen t=0 en $t = T$, waarbij de straal verdubbeld, is
$r(t) = r_0 + vt = r_0 + (r_0/T)t = r_0(1+t/T)$.
De ladingsverdeling en het elektrische veld zijn bolsymmetrisch. Het elektrische veld heeft een radiele richting naar buiten voor een positieve lading Q.

a) Net buiten het oppervlak van de ballon is het elektrische veld

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^{\,2}(1+t/T)^2}$$

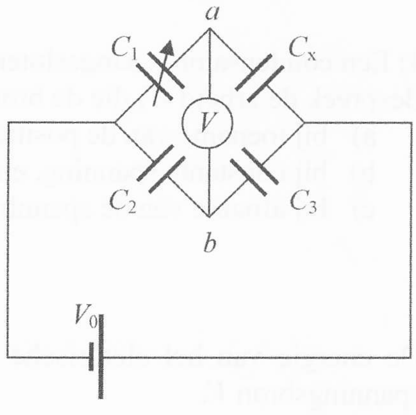
Alternatief kan de wet van Gauss worden gebruikt met

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^{\,2}(1+t/T)^2}$$

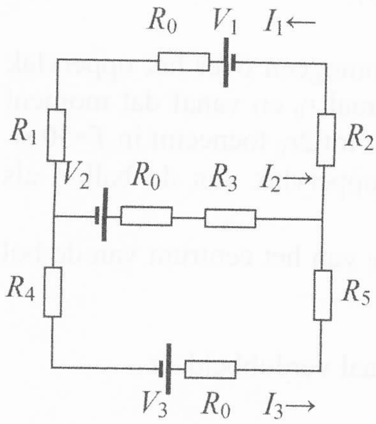
b) Omdat de ballon tussen t=0 en $t = T$ kleiner dan $4r_0$ blijft, is het elektrische veld constant en gelijk aan dat van een puntlading Q op afstand r=$4r_0$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (4r_0)^2} = \frac{Q}{64\pi\varepsilon_0 r_0^{\,2}}$$

2) Over de condensatorbrug, die is afgebeeld, staat een spanning V_0 en de variabele condensator C_1 is zo ingesteld, dat de voltmeter tussen de punten a en b een spanning nul meet. De geleidbaarheid van de condensatoren en de voltmeter is te verwaarlozen.
Bereken de onbekende capaciteit C_x als gegeven is, dat C_1= 8,9 μF en dat de capaciteiten van de vaste condensatoren C_2 en C_3 respectievelijk 18,0 μF en 6,0 μF bedragen.



Als de spanning tussen de punten a en b nul is, geldt voor de spanningen over de condensatoren:
$V_1 = V_2 \rightarrow Q_1/C_1 = Q_2/C_2$ en
$V_x = V_3 \rightarrow Q_x/C_x = Q_3/C_3$.
Deling van de twee vergelijkingen geeft
$(Q_1/C_1)/(Q_x/C_x) = (Q_2/C_2)/(Q_3/C_3) = C_xQ_1/C_1Q_x = C_3Q_2/C_2Q_3$
Uit ladingsbehoud sinds het aanbrengen van de spanning V_0 en de te verwaarlozen geleidbaarheid van condensatoren en voltmeter volgt, dat de negatieve lading op C_x aan de kant van a en de positieve lading op C_1 aan de kant van a even groot zijn, en dus Q_1= Q_x. Ook geldt Q_2= Q_3.
$C_x/C_1 = C_3/C_2 \rightarrow C_x = C_1C_3/C_2 = 8{,}9(6{,}0/18{,}0) = 3{,}0$ μF



3) Drie spanningsbronnen V_1, V_2 en V_3 met ieder een inwendige weerstand van R_0= 1,0 Ω staan geschakeld met vijf andere weerstanden R_1 t/m R_5, zoals in het schema. Gegeven zijn: de spanningen V_1 = V_2 = 12,0 V, de weerstanden R_1=8,0 Ω, R_2=12,0 Ω, R_3=10,0 Ω, R_4=15,0 Ω en R_5=18,0 Ω, en de stroom I_2= − 0,30 A (naar links tegen de richting van de pijl, die naar rechts wijst in de richting van positieve stroom).
Bereken V_3.

In de bovenste kring verloopt de spanning tegen de klok in zo, dat volgens de 2e wet van Kirchhoff:

$$V_1 - I_1R_0 - I_1R_1 + V_2 - I_2R_0 - I_2R_3 - I_1R_2 = 0;$$

$$I_1 = (V_1 + V_2 - I_2R_0 - I_2R_3)/(R_0 + R_1 + R_2) = (12 + 12 + 3{,}3)/(21) = 1{,}30 \text{ A}$$

De netto stroom in het knooppunt tussen R_2, R_3 en R_5 zijn volgens de 1e wet van Kirchhoff:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0;$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 1{,}30 + 0{,}30 = 1{,}60 \text{ A}$$

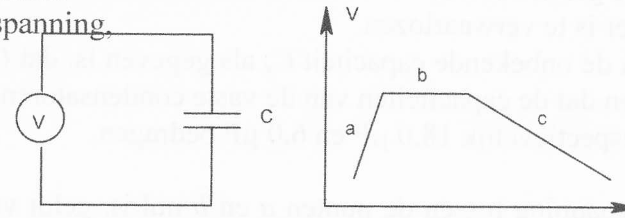
In de onderste kring verloopt de spanning tegen de klok in zo, dat volgens de 2e wet van Kirchhoff:

$$V_3 - I_3R_0 - I_3R_5 + I_2R_3 + I_2R_0 - V_2 - I_3R_4 = 0;$$

$$V_3 = I_3(R_0 + R_5 + R_4) - I_2(R_3 + R_0) + V_2 = 1{,}60(34{,}0) - (-0{,}30)(11{,}0) + 12{,}0 = 70 \text{ V}$$

4) Een condensator is aangesloten op een variërende spanningsbron, zoals in de figuur.
Bespreek de arbeid W, die de bron verricht

a) bij toename van de positieve spanning,
b) bij constante spanning, en
c) bij afname van de spanning.



De energie van het elektrische veld in de condensator, U=½CV^2, wordt geleverd door de spanningsbron V.

a) Het elektrische veld wordt vergroot en er wordt dus arbeid verricht door de bron, W>0.
b) Het elektrische veld verandert niet en er wordt dus geen arbeid verricht, W=0.
c) Het veld in de condensator wordt verminderd en er gaat energie terug naar de bron, W<0.

Tijdens het nakijken bleek een misverstand mogelijk te zijn over de arbeid, die de bron tijdens de trajecten a, b en c afzonderlijk verricht en de totale arbeid (inclusief die van de vorige trajecten). In dat geval zijn ook de antwoorden goed met

a) W_{tot}>0 en neemt toe.
b) W_{tot} is constant met W_{tot} >0.
c) W_{tot} neemt af met W_{tot} >0.

a) De magnetische veldlijnen lopen langs cirkels binnen de toroide. De wet van Ampère geeft voor de centrale cirkel $B = \mu_0 NI / 2\pi R$. Voor de meest naar binnen gelegen cirkel is het magneetveld $B = \mu_0 NI / 2\pi(R - r)$ en voor de buitenste cirkel binnen de toriode $B = \mu_0 NI / 2\pi(R + r)$. De relatieve variatie van het magneetveld binnen de toroide is $\Delta B / B = (1/(R-r) - 1/(R+r))R = 2rR/(R^2 - r^2)$ en is dus te verwaarlozen voor $r << R$.

b) De magnetische flux door één winding van de toroide is $\Phi = B\pi r^2 = \mu_0 NI\pi r^2 / 2\pi R = \mu_0 NIr^2 / 2R$ en de zelfinductie van de hele toroide is

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 r^2}{2R}.$$

c) Wanneer je een lange solenoïde ombuigt in een cirkel krijg je een toroïde met dezelfde zelfinductie. De lengte l wordt $2\pi R$ en de doorsnede A wordt πr^2.

d) Voor de gegeven parameters vinden we

$$L = \frac{\mu_0 N^2 r^2}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 550^2 \cdot 0{,}010^2}{0{,}50} = 760 \cdot 10^{-7} = 76\ \mu\text{H}$$

7 Wat zorgt ervoor dat een LC-keten bestaande uit een spoel zonder weerstand en een condensator, zelfs nadat de condensator volledig ontladen is, toch blijft oscilleren?

De energie van het elektrische veld in de condensator C is volledig omgezet in de energie van het magnetische veld in de spoel met zelfinductie L. Het magneetveld is maximaal. Om dit magneetveld te behouden, zoals de wet van Lenz voorschrijft, is een inductiestroom nodig. Deze stroom laadt de condensator met een tegengestelde lading op.

8) Vanaf een elektriciteitscentrale komt via een hoogspanningskabel met een weerstand van 3,0 Ω een vermogen van 30 MW van 45 kV (rms) bij een verdeelstation terecht.

a) Bereken de rms spanning bij de centrale.
b) Bereken het gedeelte van het vermogen, dat tijdens transport verloren gaat.
c) Stel, dat zonder neertransformator hetzelfde vermogen van 30 MW direct als 220 V (rms) bij het verdeelstation terecht komt. Wat is dan het gedeelte van het vermogen, dat tijdens transport verloren gaat?

a) We vinden de stroom in de hoogspanningskabel uit het geleverde vermogen, $P = IV$. $I = P / V = 30\text{x}10^6/45\text{x}10^3 = 677$ A (rms). Over 3,0 Ω levert dit een spanningsval $\Delta V = 2{,}0$ kV. De spanning bij de centrale is 47 kV.

b) Het vermogen, dat verloren gaat, is $\Delta P = 2{,}0 \text{ x } 10^3 \text{ x } 667$ W = 1,33 MW. Dit komt overeen met een deel van het totale vermogen van (1,33 MW) / (31.3 MW) = 0,043; dit is 4,3 procent.

c) We vinden de stroom als in (a), $I = \Delta P / V = 30 \text{ x } 10^6 / 220 = 136$ kA (rms). De spanningsval is $\Delta V = IR = 409$ kV. En het verloren vermogen is 55625 MW. Een gedeelte van 0,9995 van het vermogen (dit is 99,95 procent) gaat verloren als we, zonder hoogspanningtransformatie, 30 MW direct als 220 V willen afleveren via dezelfde hoogspanningskabel.

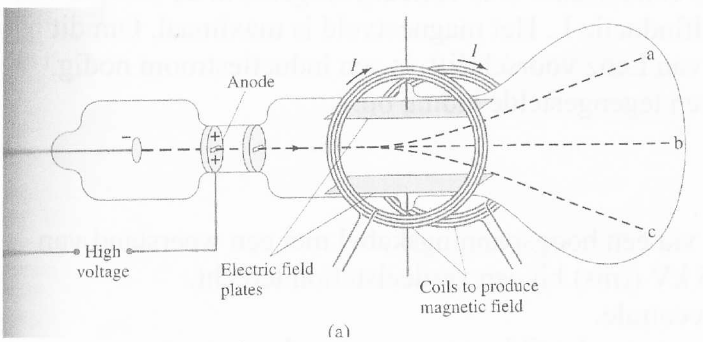
5) In de kathodestraalbuis van de figuur hieronder worden elektronen versneld in een elektrisch veld ten gevolge van een hoogspanning V tussen de elektronenbron en de anode met een opening voor de elektronenbundel. Vervolgens worden de elektronen afgebogen in het magnetische veld van een paar in het verticale vlak staande spoelen, waarin de stroom met de klok mee loopt. Over de twee vlakke elektrische platen staat geen spanning.

a) Welke gestreepte baan volgen de elektronen? Omhoog (a), rechtdoor (b), of naar beneden (c)?

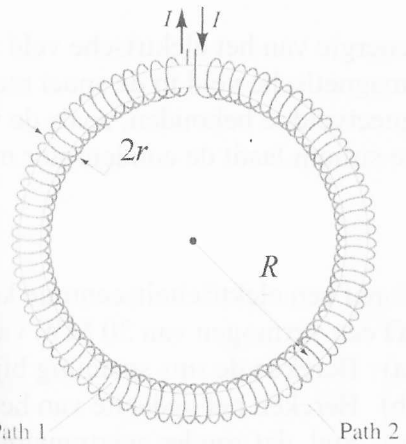
b) Laat zien, dat de straal R van de cirkelbaan van de elektronen in een constant magnetisch veld B gelijk is aan $R = \sqrt{m/e} \cdot \sqrt{2V} / B$

a) Het magnetische veld tussen de twee spoelen is loodrecht op de windingen en naar achteren gericht. In dat magnetische veld worden positief geladen deeltjes, die van links naar rechts bewegen, naar omhoog afgebogen. Elektronen zijn negatief geladen en worden naar beneden afgebogen (c).

b) De magnetische kracht levert de radiele versnelling voor de cirkelbaan van de elektronen $F = evB = mv^2 / R$. De snelheid van de elektronen volgt uit de kinetische energie na versnelling in het elektrische veld $1/2mv^2 = eV \rightarrow v = \sqrt{2eV/m}$ (zolang de versnelspanning veel kleiner is dan 511 kV volstaat deze niet-relativistische formule). Hieruit volgt $R = mv^2 / evB = mv / eB = m/e \cdot \sqrt{2eV/m} / B = \sqrt{m/e} \cdot \sqrt{2V} / B$.



(a)



6) We nemen in deze opgave aan, dat de veldsterkte binnen de toroïde (zie hierboven) overal gelijk is.

a) Bespreek de nauwkeurigheid van deze aanname met gebruik van de wet van Ampère.

b) Laat zien, dat de zelfinductie L van een toroïde, die een straal R heeft en uit N windingen bestaat, die elk een straal r hebben met $r << R$, wordt gegeven door

$$L = \frac{\mu_0 N^2 r^2}{2R}.$$

c) Wat is de overeenkomst met de zelfinductie van een solenoïde met doorsnede A en lengte l?

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}.$$

d) Bereken de zelfinductie van een toroïde, die uit 550 windingen bestaat met elk een diameter van 2,0 cm; de diameter van de toroïde bedraagt 50 cm.