1. (a) We berekenen

$$A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -9 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\mathbf{w}.$$

Er volgt dat $\mathbf{w}$ een eigenvector van A is en dat de bijbehorende eigenwaarde 2 is.

(b) We berekenen

$$(A - 3I) = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -9 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dus $A - 3I$ heeft rang 1 en daarom is 3 een eigenwaarde van A. De bijbehorende eigenruimte is

$$\text{Nul}\,(A - 3I) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Merk op dat de eigenruimte dimensie 2 heeft.

(c) D is de matrix met op de diagonaal de eigenwaarden en P is de matrix met als kolommen bijbehorende eigenvectoren. Dus

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d) We volgen de standaardberekening.

$$\begin{bmatrix} P & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

We zien dat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

2. (a) Het stelsel $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is lineair onafhankelijk als de matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ rang 3 heeft. Daarom berekenen we

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ k & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & k+1 & 3-3k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4-2k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alleen voor $k = 2$ is het stelsel lineair afhankelijk en dus voor $k \neq 2$ is het stelsel lineair onafhankelijk.

(b) We nemen $k = 2$ in de matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}$ en controleren of de laatste kolom afhankelijk is van de eerste drie. Omdat de derde kolom al van de eerste twee afhangt is, kunnen we de derde kolom weglaten. We berekenen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \ell+1 \\ 1 & -1 & \ell+2 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -\ell-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \ell+2 \\ 2 & 1 & \ell+1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -\ell-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \ell+2 \\ 0 & 3 & -\ell-3 \\ 0 & 0 & \ell-3 \\ 0 & 2 & -\ell-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \ell+2 \\ 0 & 3 & -\ell-3 \\ 0 & 0 & \ell-3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\ell+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \ell+2 \\ 0 & 3 & -\ell-3 \\ 0 & 0 & \ell-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Voor alleen de waarde $\ell = 3$ is dus $\mathbf{v}_4$ een vector in V.

3. (a) $x_3 = \frac{\det A_3(\mathbf{b})}{\det A}$. We berekenen

$$\det A = (1+t)\begin{vmatrix} 2+t & 0 \\ 2 & 1+t \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2+t \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1+t)^2(2+t) + 2(4-t),$$

en

$$\det A_3(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 3 & 2+t & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1+t)(2+t-2) = t(t+1).$$

Dus $x_3 = \frac{t(t+1)}{(1+t)^2(2+t)+2(4-t)}$.

(b) Het gevraagde element is de cofactor C_{32} van a_{32} gedeeld door $\det A$. Die cofactor is

$$C_{32} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1+t & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6.$$

Het gevraagde element is $\frac{6}{(1+t)^2(2+t)+2(4-t)}$.

4. (a) We passen eerst Gram-Schmidt toe op de kolommen $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_3$ van A toe. We krijgen dan de orthogonale vectoren $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_2 - \frac{2}{4}\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a}_3}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{a}_3}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{a}_3}\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_3 - \frac{4}{4}\mathbf{v}_1 - \frac{3}{9}\mathbf{v}_2$. Dan $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Normaliseren geeft $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(b) $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + (-4)\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$. Dus $\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Omdat $(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b})$ loodrecht staat op iedere kolom van A, is voor iedere kolom $\mathbf{a}_k$ van A de uitkomst van $\mathbf{a}_k^T(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b})$ gelijk aan 0. Dus $A^T(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5. (a) Voor iedere waarde van t is de matrix symmetrisch en is er dus een orthonormale basis van eigenvectoren van A voor $\mathbb{R}^2$.

   (b) De matrix is positief definiet als en alleen als de eigenwaarden positief zijn. Het karateristieke polynoom is $\det(A - \lambda I) = (\lambda - t)^2 - 2^2 = (\lambda - t - 2)(\lambda - t + 2)$. De eigenwaarden zijn dus $t + 2$ en $t - 2$. Die zijn alleen beide positief als $t > 2$. Dus de matrix A is positief definiet als en alleen als $t > 2$.

6. (a) **Juist**. Er is een vector $\mathbf{x} \neq 0$ zo dat $A\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Dus $(A + I)\mathbf{x} = 0$ met $\mathbf{x} \neq 0$. Dus is $A + I$ niet inverteerbaar.

   (b) **Onjuist**. Neem $A = I_2$, de twee bij twee eenheidsmatrix. Dan is de vector $(1, 1)$ een element van de kolomruimte van A maar niet een rij van A^T.

   (c) **Onjuist**. De matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ heeft geen enkele reële eigenwaarde.

   (d) **Onjuist**. De matrix A uit het vorige voorbeeld is zo dat $A^2 = -I_2$ en heeft dus -1 als dubbele eigenwaarde.

   (e) **Juist**. Als $AP\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dan ook $PA(P)\mathbf{x} = \lambda P\mathbf{x}$ en omgekeerd omdat P inverteerbaar is. Bovendien $\mathbf{x} \neq 0$ als en alleen als $P\mathbf{x} \neq 0$. Dus hebben AP en PA dezelfde eigenwaarden.

   (f) **Onjuist**. Er moet staan $\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_n + AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$. Dus als $AB \neq BA$ dan hebben we een tegenvoorbeeld. Neem bijvoorbeeld $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

7. (a) Het stelsel $\mathcal{C}$ is onafhankelijk als en alleen als het stelsel $\{[q_1(t)]_{\mathcal{B}}, [q_2(t)]_{\mathcal{B}}, [q_3(t)]_{\mathcal{B}}\}$ van de coördinaatvectoren ten opzichte van $\mathcal{B}$ onafhankelijk is in $\mathbb{R}^3$. Zet die drie coördinaatvectoren in een matrix en je krijgt

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   wat aantoont dat de kolommen onafhankelijk zijn. Bovendien zijn er net zo veel vectoren als de dimensie van V en dus is het onafhankelijke stelsel zelfs een basis.

(b) $[r(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix}.$