1. (a) De matrix A is inverteerbaar als en alleen als $\det A = ac - b^2 \neq 0$. De gevraagde voorwaarde is dus $ac - b^2 \neq 0$.

   (b) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} d & b \\ e & c \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{dc-be}{ac-b^2}$, $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{ae-bd}{ac-b^2}$.

2. (a) Er is ten minste één oplossing als en alleen als de uitgebreide matrix van het stelsel geen spilpositie heeft in de laatste kolom. Daarom

$$\begin{bmatrix} 8 & k & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 8 & k & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & k-8 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k+7 \end{bmatrix}$$

   Er is dus ten minste één oplossing als en alleen als $k = -7$. In dat geval is $x_2 = -1$ en $x_1 = 0$.

   (b) Via de normaalvergelijking vinden we dat we moeten oplossen:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Dus

$$\begin{bmatrix} 72 & 18 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 54 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

   En dus is de kleinste-kwadraten-oplossing $x_1 = 1$ en $x_2 = -1$.

3. (a) We gaan na waar de spilposities zijn van de matrix die $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$ als kolommen heeft. Dus

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   We vinden dat $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, en dat $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ onafhankelijk is en dat $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Dus $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ is een basis van V en $\dim V = 2$.

   (b) We hebben al dat $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ een basis is van V. Met Gram-Schmidt vinden we en orthogonale basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ door $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1$ en $\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{-50}{25}\mathbf{b}_1$. Dus $\mathbf{b}_2 = (2, -1, 4, 2)$.

   (c) De formule is $\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2$. Substitutie van de bekende waarden levert $\hat{\mathbf{b}} = \frac{25}{25}\mathbf{b}_1 + \frac{-25}{25}\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = (0, 5, -3, -4)$.

   (d) We weten dat $\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} \perp V$. Dus $(-4, 2, 2, 1) \perp V$.

Z.O.Z.

4. (a) De berekening

$$A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -12 & 5 & -6 \\ -18 & 9 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\mathbf{w}$$

toont aan dat $\mathbf{w}$ een eigenvector is en dat de bijbehorende eigenwaarde 2 is.

(b) We moeten oplossen $(A-(-1)I)\mathbf{x} = 0$. Dus

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -12 & 6 & -6 \\ -18 & 9 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0.$$

Direct duidelijk is dat x_2 en x_3 vrije variabelen zijn en $x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$. De eigenruimte is derhalve

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

(c) De eigenwaarden van de matrix zijn $2, -1, -1$ en de determinant is het product van de eigenwaarden en dus $\det A = 2$.

(d) Uit voorgaande volgt dat een goede keuze is

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. De diagonalisatie van A^2 heeft als diagonaalmatrix de matrix D^2 en daarvan zijn de diagonaalelementen enerzijds de eigenwaarden van A^2 en anderzijds 4, 1 en 1.

5. De algemene oplossing is

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

waarbij $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ onafhankelijk eigenvectoren zijn van $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ en λ_1 en λ_2, respectievelijk, de bijbehorende eigenwaarden. Omdat $\det A = \lambda_1\lambda_2 = -4$ en $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$ volgt dat $\lambda_1 = 4$ en $\lambda_2 = -1$. Oplossen van $(A-4I)\mathbf{x} = 0$ levert als een eigenvector bij de eigenwaarde 4 op $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ en oplossen van $(A-(-1)I)\mathbf{x} = 0$ levert als een eigenvector bij de eigenwaarde -1 op $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Voor $t = 0$ is de vergelijking

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

We zien $c_1 = 2$ en $c_2 = 1$. De gevraagde oplossing van het stelsel is dus $x_1(t) = 2e^{4t} + 2e^{-t}$ en $x_2(t) = -2e^{4t} + 3e^{-t}$.

6. (a) *Onjuist.* De matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ is inverteerbaar, heeft alleen eigenwaarde 1 (bij driehoeksmatrix staan de eigenwaarden op de diagonaal) en is niet van de vorm $A = PDP^{-1}$ met $D = I_2$ (is niet diagonaliseerbaar), omdat $A \neq I_2$.

   (b) *Juist.* $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$ omdat $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ vierkant is en $\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = I_4$.

   (c) *Onjuist.* De matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ voldoet aan $A \neq I$, $A \neq -I$ en $A^2 = I$.

   (d) *Juist.* $\det AA^T = \det A \det A^T = \det A \det A = (\det A)^2 \geq 0$.

   (e) *Onjuist.* Als de coëfficientenmatrix niet inverteerbaar is, dan geldt de regel van Cramer niet. Voorbeeld: $2x_1 = 1$ en $0x_2 = 0$.

   (f) *Juist.* Bewijs: $T(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_3 + by_3 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$, voor alle getallen a en b en vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$.

   (g) *Juist.* Als λ een eigenwaarde van A is, dan is $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ voor een vector $\mathbf{x} \neq 0$. Dus $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda\lambda\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$ en $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Dus $\lambda^2\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ en $(\lambda^2 - \lambda)\mathbf{x} = 0$ met $\mathbf{x} \neq 0$. Dan moet $\lambda^2 - \lambda = 0$ en dus $\lambda = 1$ of $\lambda = 0$

7. (a) Het is voldoende aan te tonen dat $\mathcal{C}$ een onafhankelijk stelsel is. Noem de vectoren van $\mathcal{C}$ nu $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$. Dan is het voldoende dat de coördinaatvectoren ten opzichte van de standaardbasis, $[c_1(t)]_{\mathcal{E}} = (1,\ 1,\ 1)$, $[c_2(t)]_{\mathcal{E}} = (1,\ -1,\ 1)$, $[c_3(t)]_{\mathcal{E}} = (1,\ 0,\ -1)$ onafhankelijk zijn. Dat is duidelijk omdat de eerste ongelijk 0 is, de tweede geen veelvoud van de eerste is en de derde geen combinatie van de eerste twee is omdat iedere combinatie van die twee gelijke eerste en derde component heeft.

   (b) We willen $q(t) = x_1c_1(t) + x_2c_2(t) + x_3c_3(t)$. Dan moet hetzelfde gelden voor de coördinaatvectoren ten opzichte van de standaardbasis. Dus

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   We vinden $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ en $x_3 = -1$. Dus $[q(t)]_{\mathcal{C}} = (1,\ 2,\ -1)$.

   (c) We vonden bij (b) dat

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}[q(t)]_{\mathcal{C}} = [q(t)]_{\mathcal{E}}.$$

   Dit geldt voor iedere vector in $\mathbb{P}_2$. De overgangsmatrix is dus

$$A = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{E}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$