1. (a) Neem $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Een echelonvorm voor A is $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dus $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ is een basis van de kolomruimte V van A.

   (b) We kunnen $\mathbf{x}$ vinden uit de vergelijking $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}^T \mathbf{w}$. Berekening leert

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 45 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}^T \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 45 \\ 81 \end{bmatrix}.$$

   Oplossen van deze eenvoudige vergelijking (deel door 9(!)) levert dat $\mathbf{x} = (7, -1)$.

   (c) Met Gram-Schmidt orthogonaliseren van $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ levert de orthogonale basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ met $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1$ en $\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{18}{9}\mathbf{b}_1 = (-1, 2, -2)$. Zowel $\mathbf{b}_1$ als $\mathbf{b}_2$ heeft de lengte 3. We vinden dus de orthonormale basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ door $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ door 3 te delen en dus met $\mathbf{u}_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ en $\mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

   (d) Uit onderdeel (b) volgt dat $\widehat{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = (11, 8, 7)$.

2. (a) De vergelijking is uniek oplosbaar als en alleen als $\det A_\alpha \neq 0$. Welnu

$$\det A_\alpha = (\alpha - 1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -2(\alpha - 1).$$

   Dus voor $\alpha \neq 1$ en β willekeurig is de vergelijking uniek oplosbaar.

   (b) Opdat de vergelijking geen oplossing heeft moet in de eerste plaats $\alpha = 1$ volgens (a). Verder moet de matrix

$$\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + 1 \end{bmatrix}$$

   een spilpositie in de laatste kolom hebben. Dat vereist $\beta \neq -1$.

   (c) Blijft over het geval $\alpha = 1$ en $\beta = -1$. In dat geval is de matrix $\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}_{-1} \end{bmatrix}$ rijequivalent met $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, waaruit we afleiden dat x_3 een vrije variabele is en $x_1 = -5x_3 - 1$ en $x_2 = 2x_3 + 1$. De oplossingsverzameling is dus $V = \{(-1, 1, 0) + x_3(-5, 2, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$.

3. (a) Door de rijen 2 en 3 bovenaan te zetten vinden we dat de gereduceerde echelonvorm van A gelijk is aan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

En dus wordt een basis voor de nulruimte gegeven door $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \{(-2,1,1,0), (1,-1,0,1)\}$, wat we kunnen vinden door de vrije variabelen te kiezen als $x_3 = 1, x_4 = 0$, respectievelijk $x_3 = 0, x_4 = 1$.

(b) Bereken $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}$ en $A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{w}$ en besluit dat zowel $\mathbf{v}$ als $\mathbf{w}$ eigenvectoren zijn van A met bijbehorende eigenwaarde 2.

(c) Merk op dat $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ een onafhankelijk tweetal eigenvectoren is bij de eigenwaarde 2 en dat $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ een onafhankelijk tweetal eigenvectoren is bij de eigenwaarde 0. Dus $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ is een basis van eigenvectoren van A voor $\mathbb{R}^4$. Kies daarom

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) We kennen de eigenwaarden van A. Daarom is $\det(A - \lambda I_4) = \lambda^2(\lambda-2)^2 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2$.

4. (a) Het product van de eigenwaarden van A is de determinant van A en daarom gelijk aan $(8\frac{1}{2})(-8) - (4\frac{1}{2})(-15) = -\frac{1}{2}$.

(b) $\det(A - \lambda I_2) = (8\frac{1}{2} - \lambda)(-8-\lambda) - (4\frac{1}{2})(-15) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2})$. De eigenwaarden van A zijn dus 1 en $-\frac{1}{2}$ met bijbehorende eigenvectoren $(2,1)$, respectievelijk $(5,3)$. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^t + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}.$$

We vinden c_1 en c_2 uit de waarde voor $t = 0$ wat de vergelijkingen geeft $2c_1 + 5c_2 = 1$ en $c_1 + 3c_2 = 1$. Dus $c_1 = -2$ en $c_2 = 1$. De oplossing is dus $x_1(t) = -4\mathrm{e}^t + 5\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ en $x_2(t) = -2\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

5. (a) (Juist) Omdat $m < n$ is er een vector $\mathbf{x} \neq 0$ met $A\mathbf{x} = 0$. Dan ook $A^T A\mathbf{x} = 0$ en dus is $\mathbf{x}$ een eigenvector van $A^T A$ bij de eigenwaarde 0. (N.B. A is niet vierkant en heeft dus geen eigenwaarden.)

(b) (Onjuist) Is alleen goed als $AB = BA$ en dat is niet altijd het geval. Tegenvoorbeeld: Kies $AB \neq BA$ door te nemen: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dan

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_n + AB \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_n + BA \end{bmatrix}.$$

(c) (Onjuist) De kolommen van een matrix A kunnen afhankelijk zijn en in dat geval nooit een basis vormen van een ruimte. Tegenvoorbeeld: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) (Juist) Bedenk $P^{-1}AP = (P^2)^{-1}PAP^{-1}P^2$ en dus zijn de matrices $P^{-1}AP$ en PAP^{-1} gelijkvormig (similar). Ze hebben dus dezelfde eigenwaarden.

(e) (Juist) $\det A$ is het product van de eigenwaarden van A en is daarom ongelijk aan 0 als alle eigenwaarden van A ongelijk aan 0 zijn.

(f) (Juist) Omdat A^TA symmetrisch is, heeft A^TA reële eigenwaarden.

6. (a) $T(q(t)) = \begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \\ q'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^3 - 0^2 \\ 1^3 - 1^2 \\ 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Bereken $T(b_1(t)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $T(b_2(t)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $T(b_1(t)) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Doordat $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ rij-equivalent is met $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ en die laatste matrix drie spilposities heeft, is $\{T(b_1(t)), T(b_2(t)), T(b_3(t))\}$ een basis voor $\mathbb{R}^3$.

(c) Stel $a_1b_1(t) + a_2b_2(t) + a_3b_3(t) = 0$. Dan $T(a_1b_1(t) + a_2b_2(t) + a_3b_3(t)) = 0$ en dus ook $a_1T(b_1(t)) + a_2T(b_2(t)) + a_3T(b_3(t)) = 0$. Uit (b) volgt nu dat $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. We besluiten dat het stelsel $\{b_1(t), b_2(t), b_3(t)\}$ lineair onafhankelijk is.