Faculteit der Exacte Wetenschappen	Wiskunde I voor S
Vrije Universiteit	Deeltentamen 22-10-2002

De normering van de opgaven vind je op de laatste pagina van het tentamen. Er is een formuleblad toegevoegd. Je hebt twee uur de tijd.

Opgave 1

a. Los op
$$z^2 - (4-6i)z + (-5-10i) = 0.$$

b. Schets in het complexe vlak alle getallen z die voldoen aan
$$|z-i| = \mathrm{Im}\,(z+i).$$

Opgave 2

Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, en de vector $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de inverse van A.

b. Bepaal de determinant van A.

c. Los op $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$.

Opgave 3

Voor elk reëel getal p definiëren we een matrix $A(p)$ door
$$A(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Voor welke twee waarden van p is $A(p)$ niet inverteerbaar?

b. We bekijken nu voor die twee waarden van p het stelsel vergelijkingen
$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ x+2y+pz &= b \\ x+(p+3)y+z &= c \end{aligned}$$

Onder welke voorwaarde op a, b en c is er een oplossing? (Nota bene: je vindt voor elk van die twee waarden van p een andere voorwaarde. Je wordt gevraagd om in beide gevallen die voorwaarde te geven.)

Opgave 4

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 \\ -14 & 9 & 6 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Aanwijzing: tel alle kolommen van $A - \lambda I$ eens bij elkaar.)

Opgave 5

a. Bereken $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ en $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

b. Hangt de waarde van de determinant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ af van a, b, c, d?

c. Gegeven is $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$. Bereken $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Wat volgt hieruit voor de determinant van A?

Normering	1a:3 b:3	2a:3 b:2 c:2	3a:4 b:4	4:7	5a:3 b:2 c:3

Cijfer deeltentamen 1 $= 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$

Formuleblad

Goniometrische formules

$$\begin{array}{cl}
\cos^2 x + \sin^2 x = 1 & \cos(-x) = \cos x \\
\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 & \sin(-x) = -\sin x \\
\sin(2x) = 2\sin x \cos x & \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \\
\cos 0 = 1 & \sin 0 = 0 \\
\cos \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} \\
\cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}
\end{array}$$

Complexe getallen

$$\begin{array}{lll}
z = x + iy & x = \mathrm{Re}\, z = r\cos\phi & y = \mathrm{Im}\, z = r\sin\phi \\
r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} & \phi = \arg z & z = r(\cos\phi + i\sin\phi)
\end{array}$$

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$\begin{array}{ll}
|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| & \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} & \arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2
\end{array}$$

De Moivre's stelling: $(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$

Binomium van Newton:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ Driehoek van Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Matrices en determinanten

Inverse: $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$.

A inverteerbaar $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{0}$ heeft alleen $\underline{x} = \underline{0}$ als oplossing.

Eigenwaarden en eigenvectoren: $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ met $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Karakteristieke vergelijking: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Regel van Cramer: $\det A = D$. Oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$x_j \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$