1. a) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} -2t^{-\frac{1}{2}}+2 = 2.$

   b) Substitueer $u = \sin x$ en bereken met $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$ dat $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sin(\pi/6)}^{\sin(\pi/2)}\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \left[2\sqrt{u}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 2-\sqrt{2}.$

   c) $\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2+x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}}\frac{2}{2+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{2}}\frac{x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x$. Voor de eerste van de twee integralen gebruiken we $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$ en krijgen $\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2}{2+x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^1\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\,[\arctan \mathrm{u}]_0^1 = \sqrt{2}\frac{\pi}{4}$. In de tweede substitueren we $u = 2+x^2$ en krijgen $\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^4\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\log|u|\right]_2^4 = \frac{1}{2}\ln 2$. Totaal dus
$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2+x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$

2. Splits $\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n} = \frac{1}{\mathrm{e}^n}+\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$. De rij met termen $\frac{1}{\mathrm{e}^n}$ convergeert naar nul omdat het een meetkundige rij is met reden kleiner dan 1. Verder volgens de regel van 'l Hopital $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}\mathrm{e}^x} = 0$. Dus $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n} = 0$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. a) Schrijf $a_n = (-1)^n\frac{(n+1)^2}{n!}$. Dan $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}\frac{1}{n+1}$ en dus $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. Dus $\sum_1^\infty\frac{(n+1)^2}{n!}$ is convergent en dus is de gegeven reeks absoluut convergent.

   b) Zij $a_n = \frac{\ln n}{n}$. Merk op $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$. Verder $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{1}{x^2}+\frac{-\ln x}{x^2} < 0$ als $\ln(x) > 1$, wat zo is als $x \geq 3$. De termen van de reeks zijn dus in absolute waarde dalend naar 0. De reeks is dus convergent. Omdat $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ en de reeks $\sum_{n=3}^\infty\frac{1}{n}$ divergent is, is $\sum_{n=3}^\infty\frac{\ln n}{n}$ divergent en de convergentie dus relatief.

4. a) Schrijf $a_n = \frac{(-x)^n}{2^n\sqrt{n}}$. Dan $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}\frac{2^n\sqrt{n}}{|x|^n} = \frac{|x|}{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$. Voor $n\to\infty$ gaat dus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ naar $\frac{|x|}{2}$. De reeks is dus convergent als $|x| < 2$ en divergent als $|x| > 2$. Dus $R = 2$.

b) Voor $x = -2$ is de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ en dat is een p-reeks met $p = \frac{1}{2}$ en dus divergent. Voor $x = 2$ is de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, en dus alternerend met termen die monotoon naar nul gaan. Daarom convergent maar zoals bij $x = -2$ is gezien slechts relatief convergent.

5. a) De reeks is een meetkundige reeks met eerste term 3 en reden $\frac{3}{4}$ wat oplevert dat de reeks convergent is met som $3\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 12$.

   b) Schrijf $\frac{1}{8+x} = \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{-x}{8}}$ en herken in de rechterkant de som van de meetkundige reeks met eerste term $\frac{1}{8}$ en reden $\frac{-x}{8}$. Dus $\frac{1}{8+x} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{8^n}$. Die reeks is convergent voor $|x| < 8$ en divergent voor andere waarden van x.

6. a) $f_x(x,y) = 3x^2 - 6y$ en $f_y(x,y) = 3y^2 - 6x$. Beide zijn gelijk aan 0 als $y = \frac{1}{2}x^2$ en $x = \frac{1}{2}y^2$. Snijpunt als $x = \frac{1}{8}x^4$. We vinden dan $x = 0$ of $x = 2$. Uiteraard dan bijbehorende waarden van $y = 0$ respectievelijk $y = 2$. De stationaire punten zijn dus $(0,0)$ en $(2,2)$.

   b) $A = f_{xx}(x,y) = 6x$, $B = f_{xy}(x,y) = -6$ en $C = f_{yy}(x,y) = 6x$. Dan als $x = y = 0$ vinden we $AC - B^2 = -36$ en dus is er in $(0,0)$ geen maximum of minimum. Als $x = y = 2$ dan $AC - B^2 = 108$ en daar $A = 12$ hebben we in $(2,2)$ een minimum.

7. a)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{3}.$$

   b)

$$\int\int_S \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dA = \int_0^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\int_0^2 \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r =$$

$$\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^2 = \frac{\pi \ln 5}{8}.$$