Faculteit der Exacte Wetenschappen	Proeftentamen 2 Calculus II voor F
	Duur: $1,5$ uur
Vrije Universiteit	december 2008

1. Zij $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een vectorveld gedefinieerd door:
$$F(x,y,z) = xyz\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$$
Bepaal
   a) div F
   b) rot F
   c) div rot F

2. Gegeven zijn de vergelijkingen
$$\begin{aligned} 0 &= F(x,y,z,u,v) = x+y+z+u+v \\ 0 &= G(x,y,z,u,v) = x+v^2 \end{aligned}$$
   a) De impliciete functiestelling stelt dat er een functie $f(x,y,z)$ bestaat, zodat $u = f(x,y,z)$ in een omgeving van P als...
   b) Bepaal $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z}$ in het punt $P = (x,y,z,u,v) = (0,0,0,0,1)$

3. Zij
$$f(x,y,z) = xy - x^2 - y^2 - z^2 + 1$$
   a) Lokaliseer en classificeer de extreme punten.
   Laat het domein van f nu beperkt zijn tot de eenheidsbol
   $D^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.
   b) Bepaal opnieuw de extreme waarden van f door de rand van het domein te bestuderen met behulp van Lagrange multiplicatoren.

4. De tweede orde Taylor-benadering van een functie $f(x)$ rond het punt $x = a$ is gegeven door
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2$$
   a) Wat is het analogon voor een functie $f(x,y)$ van 2 variabelen?
   b) Geef de tweede orde Taylor-benadering van $f(x,y) = \sqrt{x} + x^2y$ rond het punt $(1,1)$.

5. Stel dat de hoogte van een heuvellandschap is gegeven door
$$h(x,y) = 1 - 2x^4 - 2y^2 + (x^4+y^2)^2$$
   a) Op welke plaatsen is de grond horizontaal?
   tip: zet $u = x^4 + y^2$. Dan volgt uit de kettingregel dat
$$\nabla h = \frac{dh}{du}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}\right) \tag{1}$$
   .
   b) Stel je staat op het punt $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en gooit een emmer water leeg. Langs welke curve in het (x,y)-vlak zal het water stromen?
   c) en tot waar?