Faculteit der Exacte Wetenschappen tentamen Calculus II, volledig tentamen
Vrije Universiteit CORRECTIEMODEL
15–12–2008, 15.15 - 18.00u.

Normering:

1 : 10	;	2a : 5	;	3a : 3	;	4a : 4	;	5a : 6	;	6 : 5
		b : 6	;	b : 5	;	b : 4	;	b : 5	;	
				c : 3		c : 4				

Eindcijfer = $\frac{\text{totaal}}{6}$.

1. In het vlak $I\!R^2$ is D het gebied

$$D = \{(x, y) : \ x > 0; \ y > 0; \ 0 < x^2 + y^2 < 1\},$$

het "rechtsbovenkwart" van de eenheidscirkel. Bereken

$$\int\int_D 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Hint: ga over op poolcoordinaten

Na invulling van poolcoordinaten heb je

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 2r^2 e^{-r^2} r dr d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 y e^{-y} dy d\phi =$$

$$-\frac{\pi}{2}(1 + y)e^{-y}|_0^1 = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{2}{e}).$$

Als het direct, zonder transformatie naar poolcoordinaten is gedaan: prima als dat (in principe) correct is gedaan. Rekenfouten niet zwaar aanrekenen. Bij poolcoordinaten de Jacobiaan r niet goed: als het gewoon vergeten is: fout rekenen. Desnoods totaal 3 punten als er nog iets goeds bij zit. Zij hoeven die jacobiaan niet uit te rekenen: direct r invullen is prima.

2. (a) Bepaal de Taylorreeks rond $x = 0$ van de functie

$$f(x) = (1 + x) \ln(1 + x).$$

Dit kan op meerdere manieren. Je kunt de T-reeks van $\ln(1 + x)$ *term voor term met* $1 + x$ *vermenigvuldigen, of je kunt direct T. reeks van* f *opschrijven, als volgt:* $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 + \ln(1 + x), f^{(n)}(x) = (-1)^n(n - 2)1(x + 1)^{1-n}$ *voor* $n \geq 2$. *Dit hoeft niet bewezen te worden, als zij de regelmaat zien is het goed. Je hebt dus*

$$f'(0) = 1, \ f^{(n)}(0) = (-1)^n(n - 2)!.$$

Gevolg: de Taylorreeks is

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n - 1)} x^n.$$

Als het principe goed is: 3 punten toekennen. 2 punten voor correct rekenen (en daar soepel mee omgaan).

(b) Bepaal de convergentiestraal van deze reeks.

$R = 1$, dit zie je via het quotientcriterium of het wortelcriterium. Als zij het vorige via vermenigvuldiging hebben gedaan kunnen zij zich direct beroepen op de conv. straal van de reeks van $\ln(1+x)$.

Het gaat hier om de argumentatie. Als die goed is, ook als de T.reeks fout was berekend, minstens 3 punten toekennen.

3. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^3) + \sin(y^3)}{x^2 + y^2}.$$

(a) Bepaal het domein van $f(x,y)$.

$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ **goed of fout**

(b) Onderzoek of $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat en bepaal die limiet als hij bestaat.

$$\left|\frac{\sin(x^3)+\sin(y^3)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{\sin(x^3)}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{\sin(y^3)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le |x| + |y|.$$

Dus de limiet bestaat en $= 0$.

De studenten moeten weten wat de vraag betekent. Als zij dat inderdaad lijken te weten: 2 punten geven. De andere punten toekennen "in redelijkheid". Een precies bewijs hoeft er niet te komen.

(c) Laat zien dat, voor alle waarden van y,

$$\lim_{x\to\infty} f(x,y) = 0.$$

Dit is triviaal **Als zij weten wat het betekent: 1 punt. De rest weer naar redelijkheid.**

4. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' = xy,$$

met beginvoorwaarden: $y(0) = 1; y'(0) = 0$. Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ de (machtreeks-)oplossing van dit probleem zijn.

(a) Laat zien dat

$$a_{3n+1} = 0 \quad \text{en} \quad a_{3n+2} = 0 \quad \text{voor alle } n \ge 0.$$

Dit kan naar keuze door gewoon invullen en "coëfficiënten jagen", of met Leibniz-McLaurin. Ik doe de laatste optie:

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 \quad (\text{ditlaatstevolgtdirektuitdevergelijking}).$$

Verder: differentieer de vergelijking n keer:

$$y^{(n+2)} = xy^{(n)} + ny^{(n-1)}.$$

Dus $y^{(n+2)}(0) = ny^{(n-1)}(0)$ voor $n \ge 1$. Het resultaat volgt nu direct.

Methode goed: 2 pnt; de resterende punten naar eigen inzicht toekennen op grond van het rekenwerk

(b) Geef een recursieformule voor de overige coëfficiënten.

In het algemeen geldt $a_j = \frac{y^{(j)}(0)}{j!}$. *Voor* $n \geq 1$ *heb je dan*

$$a_{3n} = \frac{y^{(3n)}(0)}{(3n)!} = \frac{(3n-2)y^{(3n-3)}(0)}{(3n)!} = \frac{(3n-2)(3n-3)!a_{3n-3}}{(3n)!} =$$

$$\frac{(3n-2)!a_{3n-3}}{(3n)!} = \frac{a_{3n-3}}{3n(3n-1)}.$$

Methode goed: 2 punten (dus ook als het via direkt invullen is gedaan)

(c) Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeksoplossing.

Direct het wortel- of quotientcriterium werkt niet, omdat je termen overslaat. Je hebt

$$y = \sum a_{3n}x^{3n} = a_{3n}z^n,$$

met $z = x^3$. *Met* $b_n = a_{3n}$ *heb je dan* $y = \sum b_n z^n$, *met* $b_n = a_{3n} = \frac{a_{3n-3}}{3n(3n-1)} = \frac{b_{n-1}}{3n(3n-1)}$. *Het quotientcriterium geeft nu dat de convergentiestraal (in termen van* z*!!!)* ∞ *is. Maar dan is dat ook zo in termen van* x.

Inzien dat je het quotientcriterium kunt toepassen: 2 punten. Correct met z omgaan: 2 punten. Alz zij vergeten terug te vertalen naar x: door de vingers zien.

5. De functie f is 2π-periodiek, terwijl

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad -\pi < x < 0, \\ x & \text{als} \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

(a) Bepaal de Fourierreeks van f.

Dat is gewoon even rekenen. Schrijf

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

Dan krijg je

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4},$$

en met partieel integreren

$$\alpha_{2n} = 0 \quad (n \geq 1); \quad \alpha_{2n+1} = \frac{-2}{(2n+1)^2\pi}.$$

$$\beta_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad (n > 0).$$

De studenten moeten weten hoe de coëfficiënten er uitzien. Als zij de relaties die die coëfficiënten bepalen verkeerd opschrijven: geen punten. Als dat wel correct is, maar een fout in het partieel integreren: totaal hooguit 2 punten aftrekken.

(b) Bepaal de waarde die deze reeks aanneemt in $x = \pi$ en laat zien dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De theorie zegt: die waarde wordt $\frac{\pi}{2}$. *Dat geeft*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Gevolg:

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Die theoretische waarde moeten zij kennen. Indien goed: 3 punten, indien fout: niets. Het correct berekenen van die som kan nog 2 punten opleveren.

6. Wij definiëren de functies

$$f(x,y) = x^2y + y^2x; \quad g(x,y) = e^x e^y.$$

Vervolgens definiëren wij $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Bepaal de afgeleide-matrix $DF(x,y)$ van $F(x,y)$.

De oplossing:

$$DF = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 & x^2 + 2xy \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}.$$

Dit is heel eenvoudig: goed of fout.