

Normering:

1a : 2

1b : 2

1c : 2

1d : 2

1e : 2

2 : 10

3a : 5

3b : 5

4 : 10

5a : 4

5b : 3

5c : 3

6 - 9 : 10

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1$$

1. Zij $f = x^3y - x^2y^2$. Bereken

a) f_x

b) f_y

c) f_{xy}

d) f_{yyy}

e) $2f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$

2. Zij g de functie gegeven door

$$g(x, y) = \sqrt{2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2}.$$

Schat $g(0.98, 1.02)$ door middel van linearisatie.

3. Veronderstel dat $f(u, v)$ harmonisch is, d.w.z. $f_{11} + f_{22} = 0$. Zij $u = x^2 - y^2$ en $v = 2xy$.

a) Laat zien dat u en v harmonisch zijn.

b) Laat zien dat $f(u(x, y), v(x, y))$ harmonisch is, d.w.z

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

4. Wat is de afstand van het punt $(0, 0, 0)$ tot het oppervlak gegeven door $z = xy - 1$?

5. Zij $h = \frac{1}{1+x^2+2y^2}$.

a) Bereken ∇h

b) Veronderstel dat een beek de gradient van h volgt, d.w.z. dat $d\mathbf{r} = \psi(x, y)\nabla h$, met $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, waarbij $d\mathbf{r}$ de (infinitesimale) raakvektor aan de loop van de beek is. Laat zien dat hieruit volgt dat $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}$, ofwel $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$.

c) Als gegeven is dat $y(1) = 1$, los dan $y(x)$ op uit deze differentiaalvergelijking.

6. Gegeven zijn de vergelijkingen

$$\begin{aligned} 0 &= x + y + z + w \\ 0 &= x^2 + y^2 - z^2 - w^2 \end{aligned}$$

Bereken $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$ in het punt $(x, y, z, w) = (1, 2, -1, -2)$.

7. Zij

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 4yz.$$

Bepaal en klassificeer de extreme punten.

8. Bepaal, gebruikmakend van de multiplicatorenmethode van Lagrange, de extremen van de functie

$$f(x, y, z) = 5xy + 6xz + 2yz$$

onder de voorwaarde

$$xyz = 60.$$

9. Voor welke a en b is de functie

$$f(a, b) = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2, \quad x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$$

extremaal?