Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
16–02–2010, 18.30 - 21.15u.

Tentamen Calculus II, volledig tentamen
voor studenten 2MNW, 2S.

Het gebruik van boeken, diktaten en rekenmachines is toegestaan.

Normering:

$1a:5$;	$2:8$;	$3a:5$;	$4:9$;	$5a:3$;	$6:9$
$b:5$;		$b:3$;		$b:3$;	
				$c:4$	

Eindcijfer $= \frac{\text{totaal}+6}{6}$.

1. De functie $f(x)$ is de 2π-periodieke functie, die op het interval $-\pi < x \leq \pi$ gegeven is door $f(x) = x^2$.
   (a) Bepaal de Fourierreeks van $f(x)$.
   (b) Gebruik de formule van Parseval om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ te berekenen.

2. De verzameling $R = \{(x, y) :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \subset I\!R^2$ is een ring rondom de oorsrong. Bereken
$$\int_R xy(x + y + 1)dxdy.$$

3. Beschouw het probleem
$$2(x + 1)y' - y = 0; \quad y(0) = 1.$$
Laat $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ de machtreeksoplossing zijn.
   (a) Bepaal een recursieformule voor de a_k (u hoeft die recursie niet op te lossen!)
   (b) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeksoplossing.

4. Vind het maximum/ de maxima van $f(x, y, z) = x + y + z$ op de ellipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = \frac{11}{6}$

5. Beschouw de rij $x_1, x_2, \cdots$, gegeven door
$$x_1 = 0; \quad x_{k+1} = \sqrt{1 + x_k} \quad \text{voor} \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$
   (a) Laat zien (bijvoorbeeld met inductie) dat $\{x_k\}$ een stijgende rij is.
   (b) Bewijs (bijvoorbeeld met inductie) dat voor alle k geldt: $x_k < 2$.
   (c) Uit het voorgaande volgt (dat hoeft u niet te bewijzen) dat $\lim_{k\to\infty} x_k$ bestaat. Bereken die limiet.

6. Onderzoek of
$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{\ln(1 + x^2)\ln(1 + y^4)}{x^4 + y^4}$$
bestaat en bereken die limiet als het antwoord bevestigend is.

   Hint Het kan handig zijn om de limiet
$$\lim_{a\to 0} \frac{\ln(1 + a)}{a}$$
te berekenen.