Faculteit der Exacte Wetenschappen tentamen Calculus II, volledig tentamen
Vrije Universiteit voor studenten 2MNW, 2S.
18–12–2009, 15.15-18.00

Correctiemodel

Normering:

$1a:7$;	$2a:3$;	$3a:2$;	$4:6$;	$5a:1$;	$6:6$
$b:3$;	$b:2$;	$b:2$;		$b:3$	
		$c:2$		$c:4$	
				$d:4$	

Eindcijfer $= \frac{\text{totaal}+5}{5}$.

1. (a) Bepaal de machtreeksoplossing $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ van het probleem

$$(1+x)y'' + y' = 0; \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = 1.$$

Met Leibniz-McL. of gewoon invullen. Je vindt uit de beginvw $a_0 = 5$, $a_1 = 1$. *Verder heb je de recursie* $a_{n+2} = -\frac{n+1}{n+2} a_{n+1}$. *Dat geeft voor* $n \geq 2$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} a_1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Andere mogelijkheid: Je kunt de verg. schrijven als $(1+x)y')' = 0$ *en vervolgens tweemaal integreren. Dat geeft* $y = 5 + \ln(1+x)$. *Daar moeten zij dan de machreeks van geven.* **Rekenfouten niet te zwaar aanrekenen. Integrerende factor methode, maar geen machtreeks opgeschreven: 1 punt minder.**

(b) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks die u gevonden hebt.

$R = 1$ **Goede methode, maar berekening fout: 1 punt geven**

2. Op het gebied $0 \leq x \leq \pi$ beschouwen wij de functie $f(x) = x^2$.

(a) Ontwikkel $f(x)$ als sinusreeks.

Je hebt

$$\int x^2 \sin nx dx = -\left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\cos nx + \frac{2}{n^2} x \sin nx + C.$$

Je moet f *links van* 0 *voortzetten als* $-x^2$. *Alle* a_n *zijn* $= 0$, *terwijl*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right).$$

Methode goed: 2 punten

(b) Bepaal de waarde die uw reeks aanneemt in $x = \pi$.

Die waarde is 0. **goed of fout**

3. Beschouw de rij, die geven wordt door $a_1 = \frac{1}{4}$; $a_{n+1} = 2a_n(1-a_n)$ als $n \geq 1$.

(a) Laat zien dat $0 < a_n < \frac{1}{2}$ voor alle $n \geq 1$.

Als $0 < x < 1$, *dan is* $0 < 2x(1-x) \leq \frac{1}{2}$. *En* $\frac{1}{2}$ *wordt alleen in* $x = \frac{1}{2}$ *aangenomen.* **goed argument minstens een punt**

(b) Laat zien dat $\{a_n\}$ een stijgende rij is.

Gewoon invullen en gebruiken dat je $\leq \frac{1}{2}$ *bent.* **Goed argument minstens een punt**

(c) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat en bereken die limiet.

Een stijgende begrensde rij heeft een limiet (theorie!). Invullen geeft $\lim = \frac{1}{2}$ **"Bewijs" 1 pt; berekening 1 pnt**

4. In het vlak $\mathbb{R}^2$ is D het gebied

$$D = \{(x, y) : \ y > 0; \ 0 < x^2 + y^2 < 1\},$$

de bovenste helft van de eenheidscirkel. Bereken

$$\int\int_D 2(x^2 + y^2)^2 e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Hint: ga over op poolcoordinaten

Het wordt

$$\pi \int_0^1 2r^4 e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^1 y^2 e^{-y} dy = \pi \left(2 - \frac{5}{e}\right).$$

Goede transformatie 3 punten. Rest eigen inzicht. Andere methode (zonder transformatie (niet geprobeerd!)) zelf beoordelen

5. Gegeven is de functie

$$F(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

(a) Bepaal het domein van $F(x, y)$.

Alles buiten de oorsprong **goed of fout**

(b) Bewijs dat

$$\lim_{x\to 0, \ y\to 0} F(x, y)$$

bestaat en bereken die limiet.

$|F(x, y)| \leq x^2 + y^2$, *dus* $\lim = 0$. **Zelf beoordelen**

(c) Op grond van het vorige punt kunt u $F(0, 0)$ zo kiezen dat F overal continu is. Laat zien dat, na die keuze,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$$

bestaat en bereken die partiële afgeleide.

Die afgeleide is $= 0$. *Je moet de limietformule voor de afgeleide gebruiken, anders gaat het mis.* **zelf beoordelen**

(d) Onderzoek of $\frac{\partial F}{\partial x}$ continu is in $(0, 0)$.

(e) *Buiten de oorsprong kun je "gewoon" differentieren. Dan zie je discontinuiteit in de oorsprong* **eigen oordeel**

6. Vind de extremen van $F(x,y) = x^2 + y^2$ op de verzameling $\{(x,y): \; xy = 2\}$.

   Multiplicatorenmeth. geeft $x^2 = y^2$*; daarom heb je* $x = y = \sqrt{2}$ *of* $x = y = -\sqrt{2}$*. Extreme waarde wordt* 4. **eigen oordeel**