Faculteit der Exacte Wetenschappen	**uitwerking** Calculus 2
Afdeling Wiskunde	21-12-2005
Vrije Universiteit	

1. a) Uitdelen: $\frac{2x^2-3x+5}{x^2-3x+2} = 2 + \frac{3x+1}{x^2-3x+2}$.
Noemer in factoren ontbinden: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.
Uit $\frac{3x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ volgt dat $A = -4$ en $B = 7$. Dus

$$\int_3^4 \frac{2x^2-3x+5}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 2 + \frac{-4}{x-1} + \frac{7}{x-2}\,\mathrm{d}x =$$

$[2x - 4\ln(x-1) + 7\ln(x-2)]_3^4 = 2 - 4\ln 3 + 11\ln 2$.

b) De integraal is oneigenlijk bij de bovengrens $x = 1$. Dus $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\lim_{t\to 1-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^t = \lim_{t\to 1-} -2\sqrt{1-t} + 2 = 2.$

2. We schrijven $g(u) = \displaystyle\int_1^u \sqrt{1+\ln t}\,\mathrm{d}t$, en dan is $f(x) = g(\mathrm{e}^x)$. Dus $f'(x) = g'(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^x =$ $\sqrt{1+\ln(\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\sqrt{1+x}$.

3. a) Schrijf $a_n = \frac{n^2+2n}{n^3-3}$ en merk op dat $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1$. Omdat $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent is, is ook $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ divergent. De reeks is dus niet absoluut convergent. De reeks is wel relatief convergent omdat de reeks alternerend is en $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en $\{a_n\}$ een dalende rij. Het eerste is duidelijk, het tweede volgt omdat de functie $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^3-3}$ een voor $x \geq 2$ negatieve afgeleide $f'(x) = \frac{-x^4-4x^3-6x-6}{(x^3-3)^2}$ heeft.

b) Schrijf $a_n = \frac{n!}{2^n}$. Dan is $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{2}$. Dus $a_{n+1} > a_n > 0$ voor $n \geq 1$. De termen van de reeks gaan niet naar 0, de reeks is dus divergent.

4. a) Schrijf $a_n(x) = \dfrac{(-3)^n x^n}{n^3}$. Merk op $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3}|3x| =$ $|3x|$. De reeks is dus convergent als $|3x| < 1$ en divergent voor $|3x| > 1$. De convergentiestraal is dus $R = \frac{1}{3}$.

b) Voor $x = -R$ is $a_n(-\frac{1}{3}) = \frac{(-3)^n(-\frac{1}{3})^n}{n^3} = \frac{1}{n^3}$. De reeks met die termen is een p-reeks voor $p = 3$ en is dus (absoluut) convergent.
Voor $x = R$ is $a_n(\frac{1}{3}) = \frac{(-3)^n(\frac{1}{3})^n}{n^3} = (-1)^n\frac{1}{n^3}$. Uit het geval dat $x = -R$ weten we intussen dat de reeks met die termen absoluut convergent is.

5. a) De gegeven reeks is een meetkundige reeks met eerste term $a = \frac{x-2}{3}$ en reden $r = \frac{x-2}{3}$. De reeks is dus convergent als en alleen als $|r| = |\frac{x-2}{3}| < 1$, met andere woorden voor $-1 < x < 5$. In dat geval is de som van de reeks $\frac{a}{1-r}$ wat vereenvoudigt tot $\frac{x-2}{5-x}$.

b) Voor $f(x) = \tan(x)$ bepalen we $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. Bedenk dat $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dus $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, $f'(\frac{\pi}{4}) = 2$, en $f''(\frac{\pi}{4}) = 4$. Het gevraagde Taylor-polynoom is dus $1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2$.

6. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3 + 12x - 24y.$$

a) We bepalen de afgeleiden $f_x(x, y) = 6x + 6y + 12 = 6(x + y + 2)$ en $f_y(x, y) = 6x + 6y^2 - 24 = 6(x + y^2 - 4)$. De waarden in (1,1) zijn dus $f_x(1, 1) = 24$ en $f_y(1, 1) = -12$. Verder $f(1, 1) = -1$ en ligt het gegeven punt dus inderdaad op de grafiek. De vergelijking van het raakvlak is dus:
$z - (-1) = 24(x - 1) - 12(y - 1)$.

b) We lossen op $f_x(x, y) = 0$ en $f_y(x, y) = 0$. We vinden $x + y + 2 = 0$ en $x + y^2 - 4 = 0$. We substitueren $y = -x - 2$ in $x + y^2 - 4 = 0$ en vinden $0 = x + x^2 + 4x + 4 - 4 = x^2 + 5x$. Dit levert $x = 0$ of $x = -5$. De bijbehorende waarden van y zijn respectievelijk $y = -2$ en $y = 3$. De stationaire punten zijn $(0, -2)$ en $(-5, 3)$.

c) We berekenen dat $f_{xx}(x, y) = 6$, $f_{xy}(x, y) = 6$, en $f_{yy}(x, y) = 12y$.
Voor $(x, y) = (0, -2)$ vinden we $A = f_{xx}(0, -2) = B = f_{xy}(0, -2) = 6$ en $C = f_{yy}(0, -2) = -24$. Dus $\Delta = AC - B^2 < 0$ en we hebben dus geen lokaal extreme waarde in $(0, -2)$. Voor $(x, y) = (-5, 3)$ vinden we $A = f_{xx}(-5, 3) = B = f_{xy}(-5, 3) = 6$ en $C = f_{yy}(-5, 3) = 36$. Dus $\Delta = AC - B^2 > 0$ en we hebben dus een lokaal minimum in $(-5, 3)$.

7. a) We integreren eerst naar y en daarna naar x. Voor vaste x loopt de y van $-\sqrt{x}$ tot $\sqrt{x}$. De x loopt van 0 tot 4. We krijgen dus

$$\int\int_R \mathrm{e}^{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}A = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \mathrm{e}^{x\sqrt{x}} 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Substitueer nu $u = x\sqrt{x}$ en je vindt dan

$$\int\int_R \mathrm{e}^{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}A = \int_{-}^{-} \mathrm{e}^u \frac{4}{3}\mathrm{d}u = \left[\frac{4}{3}\mathrm{e}^{x\sqrt{x}}\right]_0^4 = \frac{4}{3}(\mathrm{e}^8 - 1).$$

b) We gaan over op poolcoordinaten. De gegeven kwartcirkel is in poolcoordinaten $0 \le r \le 1$ en $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Daar $x^2 + y^2 = r^2$ en $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, vinden we

$$\int\int_S \exp\left(x^2 + y^2\right) dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \mathrm{e}^{r^2} r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2}\right]_{r=0}^{r=1} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}(\mathrm{e} - 1).$$