

1. a) Substitueer in $\int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{\cos x} \, dx$ de variabele $u = \cos x$ en vind $du = -\sin x \, dx$, voor $x = 0$ is $u = 1$ en voor $x = \frac{\pi}{2}$ is $u = 0$. Er komt $\int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{\cos x} \, dx = \int_1^0 -\sqrt{u} \, du = \int_0^1 \sqrt{u} \, du = \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$.
- b) $\int_{-1}^0 \frac{4x+1}{x^2+2x+2} \, dx = \int_{-1}^0 \frac{4x+1}{(x+1)^2+1} \, dx$. Substitueer $u = x+1$ en er komt $\int_{-1}^0 \frac{4x+1}{(x+1)^2+1} \, dx = \int_0^1 \frac{4u-3}{u^2+1} \, du = \int_0^1 \frac{4u}{u^2+1} \, du + \int_0^1 \frac{-3}{u^2+1} \, du = [2 \ln(u^2+1)]_0^1 - [3 \arctan u]_0^1 = 2 \ln 2 - \frac{3\pi}{4}$.
- c) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1} \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2-1} \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right]_2^t$. Er komt $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$ omdat $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t-1}{t+1} = 1$ en dus $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{t-1}{t+1} = 0$.
2. a) We bekijken eerst de absolute convergentie en dus de reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1+2^n}$. Omdat de n -de term kleiner is dan 2^{-n} en de reeks met termen 2^{-n} een meetkundige reeks is met reden kleiner dan 1, is de reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1+2^n}$ convergent. De reeks is dus absoluut convergent.
- b) Eerst weer de absolute convergentie, dus de reeks $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$. Merk op dat $\frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \geq \frac{1}{n \ln n}$. Omdat $\int_2^t \frac{1}{x \ln x} \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2)) = \infty$, vinden we met behulp van de integraaltest dat $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ divergent is. Dus de reeks met grotere termen $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ is zeker ook divergent. De reeks $\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n}$ is alternerend met termen die dalen naar 0. Derhalve is die reeks (Leibniz) relatief convergent.
- c) Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ gaan de termen van de reeks $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ niet naar 0. Die reeks is divergent.
3. a) Neem $a_n = \frac{(-1)^n x^n}{n 5^n}$ voor $n \geq 2$. Dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{|x|}{5} = \frac{|x|}{5}$.

Volgens de quotiënttest is de reeks absoluut convergent voor $\frac{|x|}{5} < 1$ en divergent voor $\frac{|x|}{5} > 1$. Dan is de convergentiestraal dus $R = 5$.

- b) Voor $x = R = 5$ is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ en die reeks is relatief convergent want alternerend met termen die naar 0 dalen, terwijl bovendien de reeks van de absolute waarden een p-reeks is met $p = 1$.
 Voor $x = R = -5$ is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-5)^n}{n 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Die reeks is divergent omdat het een p-reeks is met $p = 1$.

4. $f(x) = \frac{x}{2-3x} = \frac{x}{2} \frac{1}{1-\frac{3}{2}x}$. We herkennen de som van een meetkundige reeks met reden $\frac{3}{2}x$. Dus $f(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n} x^n$. Omdat we een meetkundige reeks hebben met reden $\frac{3}{2}x$, is er convergentie uitsluitend voor $-1 < \frac{3}{2}x < 1$ en dus is de machtreeks convergent voor $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ en divergent voor de andere waarden van x .

5. Bereken door differentiëren van $f(x) = \sqrt{4x+1}$ dat $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = 2(4x+1)^{-\frac{1}{2}}$, $f^{(2)}(x) = -4(4x+1)^{-\frac{3}{2}}$, $f^{(3)}(x) = 24(4x+1)^{-\frac{5}{2}}$. Vul nu $x = 2$ in en je krijgt $f(2) = 3$, $f^{(1)}(2) = 2 \cdot 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $f^{(2)}(2) = -4 \cdot 9^{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{27}$. Dan $p_2(x) = 3 + \frac{2}{3}(x-2) - \frac{2}{27}(x-2)^2$ en $R_2(x) = \frac{1}{3!} 24(4z+1)^{-\frac{5}{2}}(x-2)^3 = 4(4z+1)^{-\frac{5}{2}}(x-2)^3$ voor een waarde z tussen 2 en x .

6. We berekenen:

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy - xy^2 - 2, \quad f_x(x, y) = 4x + 4y - y^2, \quad f_y(x, y) = 4x - 2xy.$$

- a) Substitueer nu $x = 1$ en $y = 1$ en we krijgen $f(1, 1) = 3$, $f_x(1, 1) = 7$ en $f_y(1, 1) = 2$. De vergelijking van het raakvlak is dan $z - 3 = 7(x - 1) + 2(y - 1)$.
 b) We bepalen de gemeenschappelijke nulpunten van $f_x(x, y)$ en $f_y(x, y)$. Welnu $f_y(x, y) = 2x(2 - y) = 0$ als $x = 0$ of $y = 2$.
 Eerst als $x = 0$ dan $f_x(0, y) = 4y - y^2 = 0$ als $y = 0$ of $y = 4$.
 Dan voor $y = 2$ is $f_x(x, 2) = 4x + 4 = 0$ als $x = -1$.
 Er zijn drie stationaire punten: $(0, 0)$, $(0, 4)$ en $(-1, 2)$.

- c) We berekenen:

$$A = f_{xx}(x, y) = 4, \quad B = f_{xy}(x, y) = 4 - 2y, \quad C = f_{yy}(x, y) = -2x.$$

| punt | A | B | C | Δ |
|-----------|---|----|---|----------|
| $(0, 0)$ | 4 | 4 | 0 | -16 |
| $(0, 4)$ | 4 | -4 | 0 | -16 |
| $(-1, 2)$ | 4 | 0 | 2 | 8 |

We zien dat alleen in $(-1, 2)$ er een (lokaal) minimum is. De andere twee stationaire punten leveren geen extrema.

7. a) We hebben dat $0 \leq x \leq 4$ en bij iedere x dat $\sqrt{x} \leq y \leq 2$. Dan $0 \leq y \leq 2$ en bij iedere y is $0 \leq x \leq y^2$. Dus

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3) \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \cos(y^3) \, dx \, dy = \int_0^2 \cos(y^3) \, y^2 \, dy =$$
$$\left[\frac{1}{3} \sin(y^3) \right]_0^2 = \frac{1}{3} \sin(8).$$

- b) Het gebied $S \subset \mathbb{R}^2$ wordt in poolcoördinaten gegeven door $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ en $0 \leq r \leq 2$. Dus

$$\int \int_S \sqrt{x^2 + y^2} \, dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^2 r \, r \, dr \, d\theta = \pi \frac{8}{3}$$