

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{x^2 + y^2}.$$

- (a) Bepaal het domein van $f(x, y)$.

Domein = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ ofwel: alles met uitzondering van de oorsprong.

- (b) Onderzoek of $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ bestaat en bepaal die limiet als hij bestaat.

De limiet bestaat niet. Argument: langs de lijn $x = 0$ kom je op 0 uit, langs de lijn $x = y$ heb je $\frac{\sin^2 x}{2x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$.

- (c) Laat zien dat, voor alle waarden van y ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) = 0.$$

Voor $x \neq 0$ geldt $0 \leq \left| \frac{\sin x \sin y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ en dat gaat naar 0.

2. Bepaal alle punten op de hyperboloïde $\{(x, y, z) : z^2 = 1 + x^2 + y^2\}$ met minimale afstand tot het punt $(1, 0, 0)$.

Eerste aanpak: via Lagrange. Je moet $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ minimaliseren ovd $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$. Je kunt evengoed minimaliseren $(x-1)^2 + y^2 + z^2$. Lagrange: zoek een λ zo dat $(x-1, y, z) = \lambda(x, y, -z)$. (Ik heb de gradienten door 2 gedeeld). Dus

$$x - 1 = \lambda x,$$

$$y = \lambda y,$$

$$z = -\lambda z.$$

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Dit moet op een of andere manier worden opgelost. Een mogelijkheid: Stap 1: $\lambda \neq 0$, want anders zou $x = 1$ en $z = 0$ en dan kun je niet aan de laatste verg. voldoen. En $z = 0$ kan sowieso niet (zelfde argument). De derde vergelijking geeft daarom $\lambda = -1$ en dat impliceert weer (2e verg) dat $y = 0$ en (eerste verg) $x = \frac{1}{2}$. De laatste vergelijking geeft dan dat $z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}$. Beide zo gevonden punten zijn (lokale) minima, met dezelfde afstand. Andere lokale minima zijn er niet, dus het zijn zelfs globale minima. Dat het minima zijn is eenvoudig: je weet dat er minima zijn en je vindt alleen deze kandidaten.

Tweede aanpak: Zoek kandidaat-punten (x, y, z) met $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ zo, dat de verschilvector $(x-1, y, z)$ loodrecht staat op de hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$. Dwz: $(x-1, y, z)$ heeft dezelfde richting als de gradient van $x^2 + y^2 - z^2 + 1$. Je komt dan weer op de eerste aanpak, zonder expliciet Lagrange te noemen.

3. Wij definiëren de functies

$$f(x, y) = \int_x^y (u + 1) du; \quad g(x, y) = e^x e^y.$$

Vervolgens definiëren wij $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ door

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de afgeleide-matrix $DF(x, y)$ van $F(x, y)$.

Die matrix is

$$\begin{pmatrix} -(x+1) & y+1 \\ e^x e^y & e^x e^y \end{pmatrix}.$$

(b) Bereken $F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en geef een schatting van $F \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$.

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } F \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \end{pmatrix}.$$

4. Laat $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0; y > 0; x + y < 2\}$. Bereken

$$\int \int_A xy \, dx dy.$$

Aanpak:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{2-y} xy \, dx dy &= \int_0^2 y \int_0^{2-y} x \, dx dy = \int_0^2 y \left[\left(\frac{x^2}{2} \right)_0^{2-y} \right] dy = \\ &= \int_0^2 \frac{y(2-y)^2}{2} dy = \int_0^2 \frac{y^3 - 4y^2 + 4y}{2} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^4}{4} - \frac{4y^3}{3} + 2y^2 \right)_0^2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5. Gegeven is de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$

(a) Bij welke punten (\bar{x}, \bar{y}) op de hyperbool kun je op unieke wijze (lokaal) een functie $y(x)$ definiëren zo, dat $y(\bar{x}) = \bar{y}$ en $x^2 - y(x)^2 = 1$?

Dat gaat goed in de punten op de hyperbool waar $F_y \neq 0$, met $F = x^2 - y^2 - 1$, dus buiten de punten $(\pm 1, 0)$.

(b) Bepaal in die gevallen $y'(x)$.

Dit kan direct uit de impliciete functiestelling of via $x^2 - y(x)^2 = 1$, dus $2x - 2yy'(x) = 0$ en $y'(x) = \frac{x}{y(x)}$. Desnoods kun je hier $y(x)$ expliciet berekenen (twee "takken"), maar dat mogen zij weglaten. Het gaat om de formule $y' = \frac{x}{y}$.

(c) Hoe zouden uw antwoorden luiden als wij hadden gevraagd naar een functie $x(y)$?

Voor alle punten op de hyperbool geldt $F_x \neq 0$, dus vraag (a) gaat overal op de hyperbool goed. Vraag (b): $x' = \frac{y}{x}$.