

Het gebruik van boeken, dictaten en calculators is toegestaan.

Normering:

$$\begin{array}{l} 1a : 1 \quad ; \quad 2 : 5 \quad ; \quad 3a : 2 \quad ; \quad 4 : 5 \quad ; \quad 5a : 2 \quad ; \\ b : 2 \quad ; \quad ; \quad b : 3 \quad ; \quad ; \quad b : 2 \quad ; \\ c : 2 \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad c : 1 \quad . \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = \frac{2 \times \text{totaal}}{5}.$$

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{x^2 + y^2}.$$

- (a) Bepaal het domein van $f(x, y)$.
(b) Onderzoek of $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ bestaat en bepaal die limiet als hij bestaat.
(c) Laat zien dat, voor alle waarden van y ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) = 0.$$

2. Bepaal alle punten op de hyperboloïde $\{(x, y, z) : z^2 = 1 + x^2 + y^2\}$ met minimale afstand tot het punt $(1, 0, 0)$.
3. Wij definiëren de functies

$$f(x, y) = \int_x^y (u + 1) du; \quad g(x, y) = e^x e^y.$$

Vervolgens definiëren wij $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ door

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal de afgeleide-matrix $DF(x, y)$ van $F(x, y)$.
(b) Bereken $F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en geef een schatting van $F \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$.
4. Laat $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0; y > 0; x + y < 2\}$. Bereken

$$\int \int_A xy \, dx dy.$$

5. Gegeven is de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$
(a) Bij welke punten (\bar{x}, \bar{y}) op de hyperbool kun je op unieke wijze (lokaal) een functie $y(x)$ definiëren zo, dat $y(\bar{x}) = \bar{y}$ en $x^2 - y(x)^2 = 1$?
(b) Bepaal in die gevallen $y'(x)$.
(c) Hoe zouden uw antwoorden luiden als wij hadden gevraagd naar een functie $x(y)$?