

Uitwerkingen eerste deeltentamen Calculus 2 voor S/MNW

24 oktober 2011

1. Om de gevraagde limiet te berekenen delen we teller en noemer door n^2 , de hoogste macht van n die we in teller en noemer tegenkomen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 8n^2}{2n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4/n - 8}{2 + 3/n} = \frac{0 - 8}{2 + 0} = -4.$$

2. Gevraagd wordt om de som te berekenen van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{e^{2n}}.$$

Dit doen we door de reeks om te schrijven naar een gewone meetkundige reeks, waarvan we de som kennen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{e^{2n}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(e^2)^n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{e^2}\right)^n = 2 \frac{1}{1 + 1/e^2} = \frac{2e^2}{e^2 + 1}.$$

3. We moeten de convergentie onderzoeken van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!n!}{(2n)!}$$

Er zitten faculteiten in de termen van deze reeks, dus het ligt voor de hand om de quotiënttoets te gebruiken. Met $a_n = (-1)^n n!n!/(2n)!$ krijgen we

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+1)!(2n)!}{(2n+2)! n!n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 6n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/n + 1/n^2}{4 + 6/n + 2/n^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

De limiet is kleiner dan 1, dus onze reeks is absoluut convergent.

4. We bekijken de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (4x - 1)^n}{n + 1}.$$

Om te bepalen voor welke waarden van x deze reeks (absoluut) convergent is passen we weer de quotiënttoets toe. Er geldt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(4x-1)^{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{(-1)^{n+1}(4x-1)^n} \right| \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|4x-1|(n+1)}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} |4x-1| \frac{1+1/n}{1+2/n} = |4x-1|. \end{aligned}$$

De reeks is (absoluut) convergent als deze limiet kleiner is dan 1, dus als

$$-1 < 4x - 1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1/2.$$

De reeks is divergent als $x < 0$ of $x > 1/2$. Het centrum van het convergentie-interval is $(0 + 1/2)/2 = 1/4$ en de convergentiestraal is $(1/2 - 0)/2 = 1/4$. Nu moeten we nog bekijken hoe de reeks zich gedraagt in de twee randpunten van het convergentie-interval. Voor $x = 0$ krijgen we de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1},$$

en deze reeks is divergent naar $-\infty$. Voor $x = 1/2$ krijgen we de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1},$$

en deze reeks is convergent: het is een alternerende reeks die voldoet aan het convergentiecriterium voor alternerende reeksen. Onze oorspronkelijke reeks is dus convergent voor $0 < x \leq 1/2$ en divergent voor alle andere x .

5. We zoeken de reeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die de Maclaurinreeks is van de functie $(1-x)e^{-x}$. Dit doen we door de bekende Maclaurinreeks van de functie e^x in te vullen en alle termen die behoren bij dezelfde macht van x samen te nemen:

$$\begin{aligned} (1-x)e^{-x} &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \\ &\quad - x + x^2 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^5}{4!} + \dots \\ &= 1 - 2x + \frac{3x^2}{2!} - \frac{4x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} - \frac{6x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

hetgeen we ook kunnen schrijven als

$$(1-x)e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n)(-1)^n}{n!} x^n.$$

6. We schrijven $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dan volgt $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, en $y(0) = 1$ geeft $a_0 = 1$. We vullen nu de machtreksen voor y en y' in in de differentiaalvergelijking $(1-x)y' - y = 0$. Dit geeft

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

We concluderen dat moet gelden

$$\begin{cases} a_1 - a_0 = 0 & (\text{de } n = 0 \text{ term}); \\ a_{n+1}(n+1) - a_n(n+1) = 0 & \text{voor } n \geq 1. \end{cases}$$

Hieruit volgt $a_1 = a_0 = 1$ en $a_{n+1} = a_n = a_{n-1} = \dots = a_0 = 1$ voor elke $n \geq 1$. De gezochte oplossing is dus

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

7. Gegeven is de functie $f(x)$ die op het interval $[-\pi, \pi)$ wordt gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0; \\ x & 0 \leq x < \pi; \end{cases}$$

en die verder periodiek wordt verondersteld met periode 2π . We berekenen de Fouriercoëfficiënten van deze functie. We beginnen met a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{4\pi} x^2 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Voor $n \geq 1$ krijgen we vervolgens

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \cos n\pi - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{1}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Er geldt dus $a_n = 0$ als n even is en groter dan 0, en $a_n = -2/(n^2\pi)$ als n oneven is en groter dan 0.

Dan berekenen we nu de Fouriercoëfficiënten b_n voor $n \geq 1$. Dat gaat op vergelijkbare wijze als de berekening van de a_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} \cos n\pi \right] = -\frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

De Fourierreeks van de functie $f(x)$ wordt dus gegeven door

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{(2n+1)^2\pi} \cos(2n+1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$